普通高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书

概率论与数理统计
复习指导与深化训练

刘　强　郭文英　孙　阳　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的。全书共分为 8 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练。本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“概率论与数理统计”课程，开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴近考试实际，做到分门别类、详略得当，帮助考生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果。

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“概率论与数理统计”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计复习指导与深化训练 / 刘强，郭文英，孙阳编著．—北京：电子工业出版社，2016.6

ISBN 978-7-121-28868-5

I．①概…　II．①刘… ②郭… ③孙…　III．①概率论－高等学校－习题集 ②数理统计－高等学校－习题集　IV．①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 109766 号

策划编辑：徐　颢
责任编辑：徐　颢
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：13.75　字数：352 千字
版　　次：2016 年 6 月第 1 版
印　　次：2016 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254103。

前　　言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多考生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了“普通高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书”，该丛书包括微积分、高等数学、线性代数和概率论与数理统计四门数学课程的辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编。

本书为概率论与数理统计分册，内容涵盖了考研“数学一”和“数学三”的全部考点。本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“概率论与数理统计”课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴近考试实际，做到分门别类、详略得当，使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升，达到融会贯通、举一反三的学习效果。

全书共分为 8 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练。具体模块内容介绍如下。

一、知识要点：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容。

二、典型例题分析：作者在多年来考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧。

三、深化训练：本模块精心选编了部分具有代表性的习题以及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三。

四、深化训练详解：本模块对深化训练习题给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维。

五、综合提高训练：本模块的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，有效提升读者的综合能力和应变能力。

为了便于读者阅读本书，书中的“数学一”要求、“数学三”不要求的内容将用“*”标出，有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出。另外为了方便读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，例如【2010（1）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试“数学一”考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年“数学一”和“数学三”考题，其余类推。

本丛书在编写过程中，得到了北京工业大学李高荣教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，以及同事们的大力支持，电子工业出版社的徐颢编辑和高教分社的谭海平社长也为丛书的出版付出了大量努力，在此表示诚挚的感谢。

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“概率论与数理统计”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书。

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错漏之处，恳请读者和同行们不吝指正。邮件地址为：cuebliuqiang@163.com。

编　者

2016 年 4 月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

1.1　知 识 要 点

1.1.1　随机试验与随机事件

所谓**随机试验**指的是具有以下性质的试验：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验可能出现的结果不止一个，且在试验之前知道所有可能的结果；

（3）试验前不能确定具体哪一个结果会出现.

通常用字母 E 表示随机试验（以后简称**试验**）.

随机试验的全部可能结果组成的集合称为随机试验的**样本空间**，记为 S ，S 中的元素，即 E 的每个试验结果，称为**样本点**，记为 e . 一般地，试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，用大写的英文字母 A ， B ， C 等表示，由一个样本点构成的单点集，称为**基本事件**，否则称为**复杂事件**.

若试验的结果为事件 A 中的样本点，则称在这次试验中**事件 A 发生**. 由于样本空间 S 包含了所有的可能结果，每次试验 S 总是发生的，因此 S 称为**必然事件**，而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，每次试验 $\varnothing$ 都不发生，因此 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

1.1.2　事件的关系与运算

（1）事件的运算

$A\bigcup B=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$ 称为 A 与 B 的**和事件**. $A\bigcup B$ 发生当且仅当 A 与 B 至少有一个发生. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

$A\bigcap B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$ 称为 A 与 B 的**积事件**，也简记为 AB . $A\bigcap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

$A-B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差事件**. $A-B$ 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生.

（2）事件的关系

若 $A\subset B$ ，则称事件 B **包含**事件 A ，此时 A 发生必然导致 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ ，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**，此时 A 与 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

若 $A\bigcup B=S$ 且 $A\bigcap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**或**互逆事件**，A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 显然对随机试验而言，每次试验事件 A 与 B 中必有且仅有一个发生.

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 S 的一个**划分**（**分割**）.

（3）运算规律

① **交换律** $A \cup B = B \cup A$； $A \cap B = B \cap A$.

② **结合律** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$； $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

③ **分配率** $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$； $(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

④ **德摩根律** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$； $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k$； $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$； $\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k$.

注 $A - B = A - AB = A\overline{B}$； $(A\overline{B}) \cup (AB) = A$.

1.1.3　频率的定义及性质

设 A 为试验 E 中的一个事件，将试验 E 在相同条件下重复进行 n 次，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，$\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

频率的性质

（1） $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

（2） $f_n(S) = 1$；

（3）设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为 m 个两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_m).$$

1.1.4　概率的公理化定义及性质

1．概率的定义

设 E 是一个随机试验，S 是样本空间，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下三个条件：

（1）**非负性**　对任意的事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

（2）**规范性**　对于必然事件 S，有 $P(S) = 1$；

（3）**可列可加性**　对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

2．概率的性质

（1）对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$； $P(\varnothing) = 0$，　$P(S) = 1$；

（2）设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

（3）若 $A \subset B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$， $P(A) \leqslant P(B)$；

（4）对任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 或 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

（5）对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

对任意三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

1.1.5　条件概率的定义及性质

1．条件概率的定义

设 A，B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

2．条件概率的性质

（1）**非负性**　对任意的事件 B，有 $P(B\mid A)\geqslant 0$；

（2）**规范性**　对于必然事件 S，有 $P(S\mid A)=1$；

（3）**可列可加性** 对于两两互不相容的事件 $B_1,B_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\,\middle|\,A\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\mid A);$$

（4）**乘法公式**　若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B\mid A)P(A)$.

设 A，B，C 为三个事件，且 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A);$$

（5）**全概率公式**　设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i);$$

推论　设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\supset A$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i);$$

（6）**贝叶斯公式**　设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，$P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

1.1.6　事件的独立性

（1）两个事件相互独立的定义

设 A， B 是两个事件，如果满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

（2）两个事件相互独立的性质

① 若 $P(A) > 0$，则事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A) = P(B)$.

② 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

注　当 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$ 时，“A 与 B 相互独立”与“A 与 B 互不相容”不能同时成立.

（3）三个事件相互独立的定义

设 A， B， C 是三个事件，如果满足

$$P(AB) = P(A)P(B),\quad P(BC) = P(B)P(C),\quad P(CA) = P(C)P(A),$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

则称 A，B，C **相互独立**.

（4）三个事件相互独立的性质

① 若 A， B， C 相互独立，将其中任意 $i\ (i = 1,2,3)$ 个事件换成其对立事件，得到的三个事件仍然相互独立.

② 若 A， B， C 相互独立，则 $A \cup B$， AB， $A - B$ 均与 C 相互独立.

一般地，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 对于其中任意 $i\ (i = 2,3,\cdots,n)$ 个事件都满足积事件的概率等于各事件概率相乘，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**．将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，得到的 n 个事件仍然相互独立.

1.1.7　概率模型

概率模型描述了一类随机试验的特点，并给出了相应事件的概率计算公式.

（1）古典概型（等可能概型）

古典概型满足：样本空间中样本点有限，并且基本事件均等可能发生．设样本空间 S 中的样本点总数为 n，事件 A 中包含的样本点数为 n_A，则

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A\text{中的基本事件总数}}{S\text{中的基本事件总数}}.$$

（2）几何概型

几何概率满足：样本空间是一个测度（如长度，面积，体积等）有限的区域（例如长度有限的线段，面积有限的区域等），事件 A 中的样本点为区域的子集，且事件 A 发生的可能性大小与 A 的测度成正比．设样本空间 S 的测度为 $L(S)$，事件 A 的测度为 $L(A)$，则

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)}.$$

（3）伯努利概型

如果试验 E 只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，则称 E 为**伯努利试验**，将试验 E 在相同条件下独立地

重复进行 n 次所构成的试验称为 n **重伯努利试验**．设 $P(A)=p\ (0<p<1)$，将 n 重伯努利概型中事件 A 发生 k 次的概率记为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n .$$

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一：事件的运算及事件概率的求解问题

本题型要求读者正确使用事件的运算形式来表达事件，能够熟练使用事件的运算规律进行事件的运算，熟练使用概率性质进行运算．另外，在事件的运算中差事件 $A-B$ 常使用其等价事件 $A-AB$ 或 $A\overline{B}$ 替换．

例 1.2.1　【1989（4）】以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 表示的是（　　）．

（A）“甲种产品滞销，乙种产品畅销”　　（B）“甲、乙产品均畅销”

（C）“甲种产品滞销”　　（D）“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

解　记 $B=\{$甲种产品畅销$\}$，$C=\{$乙种产品滞销$\}$，由题意有 $A=BC$，从而

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{甲种产品滞销或乙种产品畅销}\},$$

故本题选（D）．

例 1.2.2　设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件

（1）A 发生，B 与 C 不发生；

（2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（3）A,B,C 中至少有一个发生；

（4）A,B,C 都不发生；

（5）A,B,C 中不多于两个发生；

（6）A,B,C 中至少有两个发生．

解（1）$A\overline{B}\overline{C}$；（2）$AB\overline{C}$；（3）$A\cup B\cup C$；（4）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；（5）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；（6）$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$．

例 1.2.3　【2000（3）】在电炉上安装 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的．在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}<T_{(2)}<T_{(3)}<T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的温度值按递增顺序的排列，则事件 E 等于（　　）．

（A）$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　（B）$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　（C）$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　（D）$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解　由题意，事件“电炉断电”等价于 4 个温控器中至少有两个显示的温度值不低于 t_0，从而必有第二高的温度值 $T_{(3)}\geqslant t_0$，故本题选（C）．

例 1.2.4　设标号为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个电子元件可按图 1.1、图 1.2 两种方式连接成系统，若从左端输入的电流能由右端输出则系统工作正常，以 A_i 表示第 $i\,(i=1,2,3,4,5)$ 个元件工作正常，试将系统工作正常用 $A_i\ (i=1,2,3,4,5)$ 表示．

解　按图 1.1 所示的方式连接，系统工作正常为元件 1 与 2 中至少有一个工作正常，并且元件 3, 4 作为一个整体与元件 5 中至少有一个工作正常，因此系统工作正常可表示为

$$(A_1 \cup A_2) \cap [(A_3 \cap A_4) \cup A_5] .$$

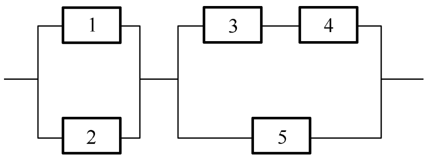


图 1.1　连接方式 1

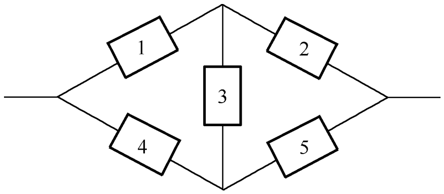


图 1.2　连接方式 2

按图 1.2 所示的方式连接，系统工作正常为元件$1,2$工作正常，或元件$4,5$工作正常，或元件$1,3,5$工作正常或元件$2,3,4$工作正常，因此系统工作正常可表示为

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_4 \cup A_5) \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup (A_4 \cap A_3 \cap A_2) .$$

例 1.2.5　【1992（3）】事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则（　　）.

（A）$P(C) \leqslant P(A)+P(B)-1$　　（B）$P(C) \geqslant P(A)+P(B)-1$

（C）$P(AB)=P(C)$　　（D）$P(A \cup B)=P(C)$

解　由题可知，$AB \subset C$，故 $P(AB) \leqslant P(C)$，从而

$$1 \geqslant P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \geqslant P(A)+P(B)-P(C) ,$$

因此本题选（B）.

例 1.2.6　【2009（3）】设事件 A 与事件 B 互不相容，则（　　）

（A）$P(\bar{A}\bar{B})=0$　　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(A)=1-P(B)$　　（D）$P(\bar{A} \cup \bar{B})=1$

解　由题意，事件 A 与事件 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$，因此有 $P(\bar{A} \cup \bar{B})=1-P(AB)=1$，故本题选（D）.

例 1.2.7　【2015（3）】设 A,B 为任意两个事件，则（　　）.

（A）$P(AB) \leqslant P(A)P(B)$　　（B）$P(AB) \geqslant P(A)P(B)$

（C）$P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　（D）$P(AB) \geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解　由 $AB \subset A$，$AB \subset B$，可知 $P(AB) \leqslant P(A)$，$P(AB) \leqslant P(B)$，从而

$$[P(AB)]^2 \leqslant P(A)P(B) ,\quad P(AB) \leqslant \sqrt{P(A)P(B)} \leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2} ,$$

故本题选（C）.

例 1.2.8　设 A,B 为任意两个事件，证明：$\left|P(AB)-P(A)P(B)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

证　由于 $AB \subset A$，$AB \subset B$，有

$$P(AB) \leqslant P(A) ,\quad P(AB) \leqslant P(B) ,$$

因此

$$\begin{aligned}\left|P(AB)-P(A)P(B)\right| &\leqslant \left|P(AB)-P(AB)P(AB)\right| = P(AB)[1-P(AB)] \\ &\leqslant \left(\frac{P(AB)+1-P(AB)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} ,\end{aligned}$$

故结论得证.

例 1.2.9　【1992（1）】设 A, B, C 为三个事件，且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=0,\quad P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16},$$

求事件 A, B, C 都不发生的概率.

解　由 $ABC \subset AB$，有 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$，故

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) &= 1-P\left(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\right)=1-P(A\cup B\cup C) \\ &= 1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)] \\ &= 1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

例 1.2.10　设 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B\cup C$，$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，$\bar{A}\bar{B}C$，$\bar{A}\bar{B}\cup C$ 的概率.

解　根据概率的计算法则，有

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20}, \end{aligned}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}.$$

由于 $\bar{A}\bar{B}=\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，且 $\bar{A}\bar{B}C$ 与 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 互不相容，从而有

$$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A}\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60},$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\cup C)=P(\bar{A}\bar{B})+P(C)-P(\bar{A}\bar{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

例 1.2.11　设 $P(A\cup B)=0.6$，且 $P(\bar{A}B)=0.3$，求 $P(\bar{A})$.

解　由

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(\bar{A}B),$$

有

$$P(A)=P(A\cup B)-P(\bar{A}B)=0.6-0.3=0.3,$$

故

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.3=0.7.$$

例 1.2.12　证明 $[(A\cup B)(A\cup\bar{B})]\cup[(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})]=S$，其中 S 为样本空间.

证　由分配律有

$$\begin{aligned} [(A\cup B)(A\cup\bar{B})]\cup[(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})] &= [A\cup(B\bar{B})]\cup[\bar{A}\cup(B\bar{B})] \\ &= (A\cup\varnothing)\cup(\bar{A}\cup\varnothing)=A\cup\bar{A}=S. \end{aligned}$$

例 1.2.13　证明 $A-BC=(A-B)\cup(A-C)$.

证　$(A-B)\cup(A-C)=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})=A(\overline{B}\cup\overline{C})=A(\overline{BC})=A-BC$.

例 1.2.14　设 A,B 是任意两个概率不为零的且互不相容的事件，则下列结论中正确的是（　）.

（A）$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容　　（B）$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(A-B)=P(A)$

解　选项 A 错误，因为若 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B\subset S$ ，则

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}\neq\varnothing,$$

从而 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容；选项 B 错误，因为若 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=S$ ，则

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing,$$

从而 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容．当事件 A,B 的概率不为零时，独立与不相容不能同时成立，故选项 C 错误；由 $A\cap B=\varnothing$，从而 $A-B=A-AB=A$ ，$P(A-B)=P(A)$，所以选项 D 正确.

例 1.2.15　设 A 与 B 为对立事件，证明 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也为对立事件.

证　由 A 与 B 为对立事件，有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$ ，从而 $\overline{AB}=S$ 且 $\overline{A\cup B}=\varnothing$，故 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为对立事件.

1.2.2　题型二：古典概型、几何概型的计算

在古典概型的计算中，要注意分析试验的全部基本事件是什么，以及要计算概率的事件中含有哪些基本事件；几何概型的计算常与高等数学的知识相结合.

例 1.2.16　袋中有 5 只球，其中只有 1 只红球，每次取 1 只球，取出后不放回，（1）求前 3 次取到的球中有红球的概率；（2）求第 3 次取到的球是红球的概率.

解　（1）对袋子中的球进行编号，考虑取出 3 只球的所有可能情况，样本空间 S 中的样本点数为 A_5^3（排列数），设 $A=\{$前 3 次取到的球中有红球$\}$，则 A 中的样本点数为 $3C_4^1C_3^1$，由古典概型有

$$P(A)=\frac{3C_4^1C_3^1}{A_5^3}.$$

（2）设 $B=\{$第 3 次取到的球是红球$\}$，则 B 中的样本点数为 $C_4^1C_3^1$，由古典概型有

$$P(B)=\frac{C_4^1C_3^1}{A_5^3}.$$

注　本题中（1）的计算也可以在压缩的样本空间上进行，S 中的样本点数为 C_5^3（组合数）A 中的样本点数为 C_4^2，由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_5^3},$$

但（2）的计算不能在压缩的样本空间上进行，因为若使用 C_5^3（组合数）计算 S 中的样本点数，则 B 不是 S 子集，即 B 不是事件.

例 1.2.17　袋中有10 只球，其中 4 只白球，3 只红球，3 只黄球，从中取球 3 只，每次取 1 只球，取出后不放回，求：

（1）这 3 只球颜色相同的概率；　（2）这 3 只球颜色互异的概率；

（3）这 3 只球中恰有一只白球的概率；　（4）这 3 只球中至少有一只白球的概率；

（5）这 3 只球中恰有两只颜色相同的概率；（6）这 3 只球中至少有两只颜色相同的概率.

解　按颜色不同对球分别进行编号，取到三只球作为一个试验结果，从而样本空间中样本点总数为 C_{10}^3（组合数）.

（1）令 $A_1=\{3$只球颜色相同$\}$，由于 3 只球同为白色的选取方式为 C_4^3，而同为红色、黄色的选取方式均为 C_3^3，故 A_1 包含的样本点数为 $C_4^3+2C_3^3$，因此

$$P(A_1)=\frac{C_4^3+2C_3^3}{C_{10}^3}.$$

（2）令 $A_2=\{3$只球颜色互异$\}$，由于 3 只球颜色互异，即 3 只中白、红、黄各一只，从而 A_2 包含的样本点数为 $C_4^1C_3^1C_3^1$，因此

$$P(A_2)=\frac{C_4^1C_3^1C_3^1}{C_{10}^3}.$$

（3）令 $A_3=\{3$只球中恰有一只白球$\}$，由于白球的选取方式为 C_4^1，而另外两只球的选取方式为 C_6^2，根据乘法原理，A_3 包含的样本点数为 $C_4^1C_6^2$，因此

$$P(A_3)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}.$$

（4）令 $A_4=\{3$只球中至少有一只白球$\}$，则 $\overline{A_4}=\{3$只球中没有白色球$\}$，由于没有取到白色球等价于在红球、黄球中任取 3 只球，有 $\overline{A_4}$ 包含的样本点数为 C_6^3，从而 A_4 包含的样本点数为 $C_{10}^3-C_6^3$，因此

$$P(A_4)=\frac{C_{10}^3-C_6^3}{C_{10}^3}.$$

（5）令 $A_5=\{3$只球中恰有两只颜色相同$\}$，由于两只颜色相同的球为白色、红色、黄色，选取方式分别为 $C_4^2C_6^1$、$C_3^2C_7^1$、$C_3^2C_7^1$，故 A_5 包含的样本点数为 $C_4^2C_6^1+2C_3^2C_7^1$，因此

$$P(A_5)=\frac{C_4^2C_6^1+2C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}.$$

（6）令 $A_6=\{3$只球中至少有两只颜色相同$\}$，则 $\overline{A_6}=\{3$只球颜色互异$\}=A_2$，因此

$$P(A_6)=1-P\left(\overline{A_6}\right)=1-P(A_2)=1-\frac{C_4^1C_3^1C_3^1}{C_{10}^3}.$$

注　计算复杂事件中的样本点数，可利用样本空间中的样本点数减去其对立事件中的样本点数，这种方法在计算含“至少”这样的事件点数时常常很方便，如本题中（4）、（6）的解答.

例 1.2.18　四种颜色的球，每种颜色各 5 只，编号均为 1～5，混合后放在袋中，现从袋中任取 3 只球，求：（1）这 3 只球颜色相同且连号的概率；（2）这 3 只球颜色互异且连号的概率；（3）连号的 3 只球中恰有两只球同色的概率；（4）这 3 只球连号的概率.

解　由题意，球的总数为 $4\times5=20$，任取3只球形成的样本空间中样本点总数为 C_{20}^3，

（1）令 $A_1=\{3只球同色连号\}$，由连号球的可能颜色有 4 种，连号的方式可能为 $1,2,3$；$2,3,4$；$3,4,5$，从而 A_1 包含的样本点数为 $C_4^1C_3^1$，因此

$$P(A_1)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_{20}^3}.$$

（2）令 $A_2=\{3只球异色连号\}$，当连号方式为 $1,2,3$ 时，由于1号球有 4 种颜色可选，2 号球有 3 种颜色可选，3 号球有 2 种颜色可选，从而其样本点数为 $C_4^1C_3^1C_2^1$，类似地，连号方式为 $2,3,4$ 及 $3,4,5$ 的样本点数也均为 $C_4^1C_3^1C_2^1$，故 A_2 包含的样本点数为 $3C_4^1C_3^1C_2^1$，因此

$$P(A_2)=\frac{3C_4^1C_3^1C_2^1}{C_{20}^3}.$$

（3）令 $A_3=\{连号的3只球中恰有两球同色\}$，当连号方式为 $1,2,3$ 时，考虑到同色球的颜色共有 4 种可能，位置又分为 $1,2$；$1,3$；$2,3$ 三种方式，从而其样本点数为 $3C_4^1C_3^1$，类似地，连号方式为 $2,3,4$ 及 $3,4,5$ 的样本点数也均为 $3C_4^1C_3^1$，故 A_3 包含的样本点数为 $9C_4^1C_3^1$，因此

$$P(A_3)=\frac{9C_4^1C_3^1}{C_{20}^3}.$$

（4）令 $B=\{3只球连号\}$，则 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$，再由 A_1,A_2,A_3 互不相容，有

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_{20}^3}+\frac{3C_4^1C_3^1C_2^1}{C_{20}^3}+\frac{9C_4^1C_3^1}{C_{20}^3}.$$

例 1.2.19　【2007（3）】在区间 $[0,1]$ 上任取两个数，求两数之和小于 $\frac{3}{2}$ 的概率，两数之和等于 $\frac{3}{2}$ 的概率.

解　用 x,y 分别表示取得的两个数，则有样本空间

$$S=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

令 $A=\left\{两数之和小于\frac{3}{2}\right\}$，$B=\left\{两数之和等于\frac{3}{2}\right\}$，

则有

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y<\frac{3}{2},(x,y)\in S\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y=\frac{3}{2},(x,y)\in S\right\},$$

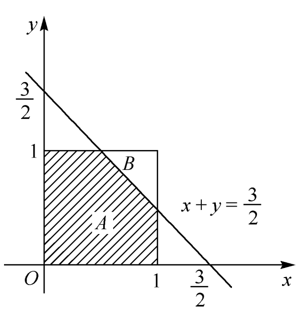


图 1.3　几何化

如图 1.3 所示，将 S，A，B 几何化后，由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{7}{8},\quad P(B)=\frac{L(B)}{L(S)}=0,$$

其中 $L(A)$，$L(B)$ 与 $L(S)$ 分别表示区域 A，B 与 S 的面积.

注　由几何概型可以看出，并不是只有不可能事件 $\varnothing$ 的概率才为零.

例 1.2.20　设 A, B 为两个事件，且 $0<P(B)<1$，若 $P(A|B)=1$，则 A 与 B 的关系可能是（　）.

（A）$A=B$　（B）$A\supset B$　（C）$A\subset B$　（D）（A），（B），（C）均有可能

解　若 $A=B$ 或 $A\supset B$，有 $AB=B$，从而

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,$$

若 $A\subset B$，也有可能使得 $P(A|B)=1$．如在例 1.1.19 中令

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y<\frac{3}{2},(x,y)\in S\right\},\quad B=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y\leqslant\frac{3}{2},(x,y)\in S\right\},$$

显然 $A\subset B$，由几何概型可知

$$P(B)=\frac{L(B)}{L(S)}=\frac{7}{8},$$

从而有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=1,$$

故本题选（D）.

例 1.2.21　【1991（1）】随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比，求该点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率.

解　如图 1.4 所示，建立直角坐标系，设所掷点的坐标用 (x,y) 表示，则有样本空间

$$S=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<2a,0<y<\sqrt{2ax-x^2}\right\},$$

令 $A=\left\{\text{掷点和原点的连线与 } x \text{ 轴的夹角小于}\dfrac{\pi}{4}\right\}$，

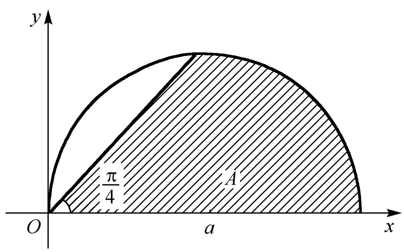


图 1.4　阴影区域

则由题意，由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{L(A)}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{2}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2a\cos\theta}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi},$$

其中 $L(A)$ 为阴影区域面积，$L(S)$ 为半圆的面积.

1.2.3　题型三：条件概率问题

关于条件概率的计算有如下几个方面的问题需要注意：（1）在计算或证明中一般可以将条件概率问题转化为无条件概率问题进行；（2）与实际问题相结合时应注意分清条件概率与积事件的概率；（3）若试验的总过程可以分解为若干个分过程时，可用乘法公式计算积事件概率；（4）样本空间中样本点若有不同属性，这时计算常与全概率公式、贝叶斯公式的计算有关.

例 1.2.22　【2012（3）】设 A, B, C 是随机事件，其中 A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，求 $P(AB|\overline{C})$.

解　由 A 与 C 互不相容，有 $P(AC)=0$，再由 $ABC\subset AC$，有 $P(ABC)=0$，从而

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

例 1.2.23　$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解　由已知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3},\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2},$$

有

$$P(AB)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\qquad P(B)=2P(AB)=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

例 1.2.24　$P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

解　由 $P(\overline{A})=0.3$，有 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.7$，再由 $P(A\overline{B})=0.5$，有

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2,$$

从而

$$\begin{aligned}P(B|A\cup\overline{B})&=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}\\&=\frac{P(BA)}{P(AB)+P(\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(AB)+1-P(B)}=\frac{0.2}{0.2+1-0.4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 1.2.25　设有 N 件产品，其中包括 n（$N\geqslant n$）件次品，现从中任取 2 件，求：

（1）取出的两件产品中有一件是次品的条件下，另一件也是次品的概率；

（2）取出的两件产品中有一件不是次品的条件下，另一件是次品的概率；

（3）取出的两件产品中至少有一件是次品的概率.

解　（1）令 $A=\{$取出的两件产品中有一件是次品$\}$，$B=\{$另一件是次品$\}$，则 $AB=\{$取出的两件产品都是次品$\}$，从而

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\dfrac{C_n^2}{C_N^2}}{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1+C_n^2}{C_N^2}}=\frac{C_n^2}{C_{N-n}^1C_n^1+C_n^2}.$$

（2）令 $C=\{$取出的两件产品中有一件不是次品$\}$，则 $CB=\{$取出的两件产品中有一件是次

品另一件是非次品}，从而

$$P(B|C)=\frac{P(CB)}{P(C)}=\frac{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1}{C_N^2}}{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1+C_{N-n}^2}{C_N^2}}=\frac{C_{N-n}^1C_n^1}{C_{N-n}^1C_n^1+C_{N-n}^2}.$$

（3）令 $D=\{$取出的两件产品中至少有一件是次品$\}$，则 $\overline{D}=\{$取出的两件产品均为非次品$\}$，从而

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{C_{N-n}^2}{C_N^2}.$$

例1.2.26　已知袋中装有 n 只红球，m 只白球，每次自袋中任取一只球，观察颜色后放回，并再放入 a 只与所取的那只球同颜色的球，现连续进行 4 次，试求前 3 次取到白球并且第 4 次取到红球的概率.

解　记 $A_i=\{$第i次取到的球为白球$\}$，$i=1,2,3,4$，则 $\overline{A_4}=\{$第4次取到的球为红球$\}$，按试验的先后顺序，应用乘法公式有

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3\overline{A_4})&=P(\overline{A_4}|A_1A_2A_3)P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)\\&=\frac{C_n^1}{C_{n+m+3a}^1}\frac{C_{m+2a}^1}{C_{n+m+2a}^1}\frac{C_{m+a}^1}{C_{n+m+a}^1}\frac{C_m^1}{C_{n+m}^1}.\end{aligned}$$

例 1.2.27　【2005（3）】从数 $1,2,3,4$ 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，求 $P\{Y=2\}$.

解　由题意，由全概率公式有

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{Y=2|X=1\}P\{X=1\}+P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\}\\&\quad+P\{Y=2|X=3\}P\{X=3\}+P\{Y=2|X=4\}P\{X=4\}\\&=0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}.\end{aligned}$$

例 1.2.28　设有两个箱子，第一个箱子装有10只球，其中8只为白色，第二个箱子装有20只球，其中4只为白色，现从每个箱子任取一球，然后再从这两个球中任取一只，求取到的球为白色的概率.

解　设 $A=\{$取到的球为白色$\}$，$B_1=\{$取到的球来自第一个箱子$\}$，$B_2=\{$取到的球来自第二个箱子$\}$，由古典概型有

$$P(A|B_1)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1},\quad P(A|B_2)=\frac{C_4^1}{C_{20}^1},$$

再由已知 $P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$，从而由全概率公式有

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{C_8^1}{C_{10}^1}+\frac{C_4^1}{C_{20}^1}\right)=\frac{1}{2}.$$

例1.2.29　发射一枚鱼雷击中潜艇致命部位的概率为 $\dfrac{1}{4}$，击中非致命部位的概率为 $\dfrac{1}{2}$，没

击中的概率为 $\frac{1}{4}$，若潜艇被击中致命部位一次即被击毁，非致命部位被击中二次被击毁的概率为 $\frac{5}{9}$，非致命部位被击中一次被击毁的概率 $\frac{1}{9}$，求同时发射两枚鱼雷潜艇被击毁的概率.

解　令 $A=\{$潜艇被击毁$\}$，$B_1=\{$两枚鱼雷至少有一枚击中致命部位$\}$，$B_2=\{$两枚都击中非致命部位$\}$，$B_3=\{$一枚击中非致命部位，另一枚没有击中$\}$，$B_4=\{$两枚都没有击中$\}$，则由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)+P(A|B_4)P(B_4)\\&=1\times P(B_1)+\frac{5}{9}\times P(B_2)+\frac{1}{9}\times P(B_3)+0\times P(B_4)\\&=\left(1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\\&=\frac{7}{16}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{29}{48}.\end{aligned}$$

例 1.2.30　【1988（4）】玻璃杯成箱出售，每箱共装有 20 只，设每箱含 0、1、2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1 和 0.1．一位顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，顾客开箱随机察看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回．试求：

（1）顾客买该箱玻璃杯的概率；（2）在顾客买的该箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率.

解　由题意，令 $A_i=\{$选取的这箱玻璃杯中含有 i 个次品$\}$，$i=0,1,2$，$B=\{$顾客买下该箱玻璃杯$\}$.

（1）由古典概型及全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)\\&=\frac{C_{20}^4}{C_{20}^4}\times 0.8+\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}\times 0.1+\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}\times 0.1=0.943,\end{aligned}$$

（2）由贝叶斯公式有

$$P(A_0|B)=\frac{P(B|A_0)P(A_0)}{P(B)}=\frac{0.8}{0.943}=0.848\ .$$

例 1.2.31　商店出售同一规格的一批产品共10箱，其中2箱为甲厂生产，3箱为乙厂生产，5箱为丙厂生产，三厂生产的产品的合格率分别是 85%、80%、90%，求：

（1）这批产品的合格率；

（2）从这 10 箱中任取一箱，再从该箱中任取一件产品，若其为不合格品，则它是由甲厂生产的概率.

解　由题意，设 $A=\{$取到的产品为合格品$\}$，B_1,B_2,B_3 依次表示取到的产品生产厂家为甲、乙、丙，则

$$P(A|B_1)=85\%,\quad P(A|B_2)=80\%,\quad P(A|B_3)=90\%,$$

且由古典概型有

$$P(B_1)=\frac{2}{10}=0.2,\quad P(B_2)=\frac{3}{10}=0.3,\quad P(B_3)=\frac{5}{10}=0.5\ .$$

（1）由全概率公式有

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$
$$=85\%\times0.2+80\%\times0.3+90\%\times0.5=0.86,$$

（2）由贝叶斯公式有

$$P(B_1|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})}=\frac{[1-P(A|B_1)]P(B_1)}{1-P(A)}=\frac{(1-0.85)\times0.2}{1-0.86}=0.214\ .$$

1.2.4　题型四：独立性与伯努利概型问题

在本题型中，需要注意事件相互独立与互不相容的区别，事件组相互独立与事件组中事件两两相互独立的区别；独立重复试验序列与贝努利概型的关系，等等.

例 1.2.32　【2014（3）】若事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　　）.

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

解　由 A 与 B 相互独立，有 A 与 $\overline{B}$ 相互独立，从而由

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=0.3,$$

可解得 $P(A)=0.6$，进而

$$P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=P(B)[1-P(A)]=0.2,$$

故本题选（B）.

例 1.2.33　【2003（3）】将一枚均匀硬币独立地掷两次，令 A_1={第一次出现正面}，A_2={第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则（　　）.

（A）A_1,A_2,A_3 相互独立　　（B）A_2,A_3,A_4 相互独立

（C）A_1,A_2,A_3 两两独立　　（D）A_2,A_3,A_4 两两独立

解　由题意有

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2)=\frac{1}{2},\quad P(A_3)=\frac{1}{2},\quad P(A_4)=\frac{1}{4},\quad P(A_1A_2)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_3)=\frac{1}{4},\quad P(A_2A_3)=\frac{1}{4},\quad P(A_2A_4)=\frac{1}{4},\quad P(A_1A_2A_3)=0,$$

从而

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\quad P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),\quad P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$
$$P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),\quad P(A_2A_4)\neq P(A_2)P(A_4),$$

故本题选（C）.

例 1.2.34　设事件 A,B,C 两两相互独立，并且 $ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$，求事件 A 的概率.

解　由题意有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)$$
$$=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16},$$

解得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$（舍去）.

例 1.2.35　设事件 A,B 相互独立，已知仅有 A 发生的概率为 $\frac{1}{4}$，仅有 B 发生的概率为 $\frac{1}{4}$，求 $P(A)$ 及 $P(B)$.

解　由题意，$P(A\bar{B})=\frac{1}{4}=P(\bar{A}B)$，从而有

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B),$$

再由 A,B 相互独立，有 $A,\bar{B}$ 也相互独立，于是

$$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]=P(A)[1-P(A)]=\frac{1}{4},$$

解得 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$.

例 1.2.36　【1995（3）】根据以往经验，某厂家生产的每台仪器，以 0.7 的概率可以直接出厂，0.3 的概率需进一步调试，经调试后以 0.8 的概率可以出厂，0.2 的概率定为不合格产品不能出厂．现该厂新生产了 $n\,(n\geqslant 2)$ 台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立），求：

（1）全部能出厂的概率；（2）恰有两台不能出厂的概率；（3）至少有两台不能出厂的概率.

解　由题意，令 $A=\{仪器需要调试\}$，$\bar{A}=\{仪器不需要调试\}$，$B=\{仪器可以出厂\}$，则由全概率公式有

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=0.8\times0.3+1\times0.7=0.94,$$

进而有：

（1）全部能出厂的概率为 0.94^n；

（2）恰有两台不能出厂的概率为 $C_n^2\times0.06^2\times0.94^{n-2}$；

（3）至少有两台不能出厂的概率为 $1-C_n^1\times0.06\times0.94^{n-1}-0.94^n$.

1.3　深 化 训 练

1.3.1　填空题

（1）设事件 B 和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.3 和 0.6，则 $P(A\bar{B})=$________.

（2）已知事件 A、B 满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\cap\bar{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

（3）一批产品有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为________.

（4）从编号为 1,2,3,4,5 的 5 张卡片中取出 3 张，最小的编号是 2 的概率等于________.

（5）边长为 1 的正方体无盖容器，内部装有 $\dfrac{1}{4}$ 的液体，若侧面或底面随机地出现一个漏洞，则最后液体漏光的概率是________.

（6）设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(A\cup B)=0.5$，则 $P(B)=$________.

（7）调查发现某个社区有12%的家庭只有一只狗，10%的家庭只有一只猫，而8%的家庭同时有一只狗和一只猫，现随机选择一个家庭，已知该家庭有一只猫，则还有一只狗的概率为________.

（8）已知10件产品中有4件是不合格品，现从中任取两件，若已知两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________.

（9）袋中装有大小相同的白球3只，黑球若干只，现有放回地摸球3次，若至少摸到一只白球的概率为19/27，则袋中黑球的个数为________.

（10）现有三个箱子，其中第一个箱子中有 4 只黑球 1 只白球，第二个箱子中有 3 只黑球 3 只白球，第三个箱子中有 3 只黑球 5 只白球．现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 只球，这只球为白球的概率为________.

（11）设工厂 A 和工厂 B 生产产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 40%和 60%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品是由 A 厂生产的概率为________.

（12）甲、乙两人独立地对同一目标各射击一次，命中的概率分别为0.6和0.5，现已知目标被命中，则它是由甲射中的概率为________.

1.3.2　单项选择题

（1）在三局两胜制的比赛中，若以 $A_i\ (i=1,2,3)$ 表示甲赢得第 i 局，则甲取胜这一事件可以表示为（　　）.

（A）$A_1\cup A_2\cup A_3$　　（B）$A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3$

（C）$A_1A_2A_3$　　（D）$A_1\cup A_2$

（2）若 A 和 B 同时发生的概率为 0，则（　　）.

（A）A 和 B 不相容（互斥）　　（B）AB 是不可能事件

（C）AB 未必是不可能事件　　（D）$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

（3）设 A,B 是两个事件，且满足 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|\overline{A})=P(B|A)$，则必有（　　）.

（A）$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　（B）$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$

（4）设事件 A 与 B 互不相容，则（　　）.

（A）$P(\overline{A}\overline{B})=0$　　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(A)=1-P(B)$　　（D）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

（5）设 $0<P(B)<1$，且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）A 与 B 互不相容　　（B）A 与 B 对立

（C）A 与 B 独立　　（D）A 与 B 不独立

（6）某人向同一目标独立重复射击，若每次击中目标的概率为 $p\,(0<p<1)$，则此人第 2 次击中目标时恰好射击 4 次的概率为（　　）.

（A）$3p(1-p)^2$　（B）$6p(1-p)^2$　（C）$3p^2(1-p)^2$　（D）$6p^2(1-p)^2$

（7）设每次试验失败的概率为 $p\ (0<p<1)$，将试验独立重复的进行下去，则直到第 n 次才取得首次成功的概率为（　　）.

（A）$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$　（B）$C_n^1(1-p)p^{n-1}$

（C）$p(1-p)^{n-1}$　（D）$(1-p)p^{n-1}$

1.3.3　设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，求 $P(\overline{A}\overline{B})$.

1.3.4　设 A,B,C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

1.3.5　若事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(B-A)$.

1.3.6　试证明：

（1）$A-BC=(A-B)\cup(A-C)$；（2）$(AB)\cup(\overline{A}B)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}\overline{B})-\overline{AB}=AB$.

1.3.7　墙上挂着5张字母卡片，其顺序为“$abcba$”，现掉落了两个，捡起后随机地挂回，求顺序仍然为“$abcba$”的概率.

1.3.8　从6双不同的鞋子中随机取出4只，求恰有一双配对的概率.

1.3.9　将4个人等可能地分配到5个房间，求房间中人数最多为2的概率（假定每个房间都可以容下4个人）.

1.3.10　在区间 $[0,1]$ 中随机取两个数，求两数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率.

1.3.11　在区间 $[0,1]$ 上任取两个数，求两个数的乘积不小于 $\dfrac{3}{16}$，并且和不大于1的概率.

1.3.12　设有两个盒子，第一个盒子中装有3只红球，3只绿球，2只白球，第二个盒子中装有2只红球，3只绿球，4只白球，现分别从两个盒子中各取一只球.

（1）求至少有一只红球的概率；

（2）求有一只红球一只白球的概率；

（3）已知两只球中有一只为红色，求另一只球为白色的概率.

1.3.13　袋中有50个乒乓球，其中20个是黄球，30个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，求第2个人取得黄球的概率.

1.3.14　仓库中存放的某种元件由编号为1, 2, 3的三个工厂提供，提供的份额分别是15%、80%、5%，又知三个工厂生产产品的次品率分别是0.02、0.01、0.03，现从仓库中随机地取出一只元件，经检验取到是次品，求该产品是第二个厂家生产的概率.

1.3.15　设事件 A,B,C 满足 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

1.3.16　已知 $P(A)>0$，证明 $P((AB)|A)\geqslant P((AB)|A\cup B)$.

1.3.17　对于任意的三个事件 A,B,C，证明 $P(ABC)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2$.

1.3.18　已知袋中装有2只红球，3只白球，每次任取一只，观察颜色后放回，如此进行下去，求首次取到白球之前取到红球的概率.

1.3.19　若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

1.3.20　若事件 A,B,C 相互独立，证明 C 与 AB 相互独立，C 与 $A\cup B$ 相互独立.

1.4　深化训练详解

1.3.1　填空题

（1）0.3；**提示**　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(B)+P(A\overline{B})$.

（2）$1-p$；**提示**　由

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)],$$

可知 $P(A)+P(B)=1$，从而 $P(B)=1-p$.

（3）$\dfrac{1}{6}$；（4）$\dfrac{3}{10}$；（5）$\dfrac{1}{5}$；（6）$\dfrac{2}{7}$；（7）$\dfrac{4}{9}$；

（8）$\dfrac{1}{5}$；**提示**　由题意，取到的两件产品均为不合格品的样本点数为 C_4^2，恰有一件不合格品的样本点数为 $C_4^1C_6^1$，从而概率为 $\dfrac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}$.

（9）6；**提示**　由题意，三次摸到的球全为黑色的概率为 $\dfrac{8}{27}$，由于各次摸球相互独立，从而摸到黑球的概率为 $\dfrac{2}{3}$，故袋中黑球数为 6.

（10）$\dfrac{53}{120}$；（11）$\dfrac{1}{4}$；（12）$\dfrac{3}{4}$.

1.3.2　单项选择题

（1）（B）；（2）（C）；（3）（C）；（4）（D）；（5）（C）；（6）（C）；（7）（D）.

1.3.3　因为 A 与 B 互不相容，从而 $AB=\varnothing$， $P(AB)=0$，故

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-[0.3+0.6-0]=0.1.\end{aligned}$$

1.3.4　由于 $ABC\subset AB$，有 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，可得 $P(ABC)=0$，故

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

1.3.5　由 A 与 B 相互独立，有 A 与 $\overline{B}$ 相互独立，从而由

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=0.3,$$

可解得 $P(A)=0.6$，进而

$$P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=P(B)[1-P(A)]=0.2 .$$

1.3.6　（1）$(A-B)\cup(A-C)=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})=A(\overline{B}\cup\overline{C})=A(\overline{BC})=A-BC$.

（2）
$$\begin{aligned}(AB)\cup(\overline{A}B)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}\overline{B})-\overline{AB}&=[(A\cup\overline{A})B]\cup[(A\cup\overline{A})\overline{B}]-\overline{AB}\\&=B\cup\overline{B}-\overline{AB}=S-\overline{AB}=AB .\end{aligned}$$

1.3.7　由于卡片可能掉落的情况有 C_5^2 种，则随机挂回的情况即样本空间中的点数为 $2C_5^2$，

显然其中有一半的挂回方式是正确的（顺序仍然为“ $abcba$ ”)，再注意到当两个 a 或两个 b 同时掉落时，不论怎么挂回都能使得顺序为“ $abcba$ ”，故令 $A=\{$顺序仍然为“ $abcba$ ”$\}$，则 A 中的点数为 C_5^2+2 ，由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_5^2+2}{2C_5^2}.$$

1.3.8　由于只关心是否能配对，可以不考虑取出鞋的次序，因此样本空间中的样本点数为 C_{12}^4 ，而能配对的一双鞋为 6 双中的任意一双，再从其余的 5 双中任选两双，并且每双中各取一只，按乘法原理，恰有一双能配对的点数为 $C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1$，所以恰有一双能配对的概率为

$$\frac{C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}.$$

1.3.9　将 4 个人分配到 5 个房间的全部分配方法为 5^4，而人数最多的房间中恰有 1 人的分配方法为 $C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1$ ，人数最多的房间中恰有 2 人的分配方法为 $C_5^1C_4^2C_4^1C_3^1$ ，从而由古典概型有房间中人数最多为 2 的概率为

$$\frac{C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1}{5^4}+\frac{C_4^2C_5^1C_4^1C_3^1}{5^4}=\frac{4}{5}.$$

1.3.10　设取到的两个数分别为 x, y ， $A=\left\{两数之差的绝对值小于\frac{1}{2}\right\}$，则

$$S=\{(x, y)\big|0<x, y<1\}，\quad A=\left\{(x, y)\big||x-y|<\frac{1}{2}\right\},$$

故 $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(S)}=\dfrac{3}{4}$.

1.3.11　用 x, y 表示取得的两个数，则样本空间为

$$S=\{(x,y)\big|\ 0\leqslant x,y\leqslant 1\},$$

令 $A=\{$两个数的乘积不小于 $\dfrac{3}{16}$，且两个数之和不大于 1$\}$，则

$$A=\left\{(x, y)\big|xy\geqslant\frac{3}{16},x+y\leqslant 1,\ (x, y)\in S\right\},$$

由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\int_{1/4}^{3/4}(1-x)\mathrm{d}x-\int_{1/4}^{3/4}\frac{3}{16x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3.$$

1.3.12　令 $A=\{$至少有一只红球$\}$， $B=\{$一只红球一只白球$\}$，

（1）由独立性，取到的球都不是红球的概率为 $\dfrac{C_5^1}{C_8^1}\cdot\dfrac{C_7^1}{C_9^1}$，从而

$$P(A)=1-\frac{C_5^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_9^1}=1-\frac{35}{72}=\frac{37}{72},$$

（2）令 $C_1=\{$从第一个盒子取到红球并且从第二个盒子中取到白球$\}$，$C_2=\{$从第一个盒子

中取到白球并且从第二个盒子取到红球}，则 $B=C_1\cup C_2$，从而

$$P(B)=\frac{C_3^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}+\frac{C_2^1}{C_8^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_9^1}=\frac{2}{9},$$

（3）由条件概率有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{37}{72}}=\frac{16}{37}.$$

1.3.13　记 $A_1=\{$第一个人取到球为黄球$\}$，$A_2=\{$第一个人取到球为白球$\}$，$B=\{$第二个人取到的球为黄球$\}$，由古典概型及全概率公式有

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)=\frac{C_{19}^1}{C_{49}^1}\frac{C_{20}^1}{C_{50}^1}+\frac{C_{20}^1}{C_{49}^1}\frac{C_{30}^1}{C_{50}^1}=0.4.$$

1.3.14　设 $A=\{$取到的产品是次品$\}$，$B_i=\{$取到的产品由第 i 家生产$\}$，$i=1,2,3$，由已知有 $P(B_1)=15\%$，$P(B_2)=80\%$，$P(B_3)=5\%$，$P(A|B_1)=0.02$，$P(A|B_2)=0.01$，$P(A|B_3)=0.03$，故

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{0.01\times 0.8}{0.02\times 0.15+0.01\times 0.8+0.03\times 0.05}=\frac{8}{53}.$$

1.3.15　由 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，有 $\frac{P(AC)}{P(C)}\geqslant\frac{P(BC)}{P(C)}$，即 $P(AC)\geqslant P(BC)$，类似地，由 $P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，有 $P(A\overline{C})\geqslant P(B\overline{C})$，从而

$$P(AC)+P(A\overline{C})\geqslant P(BC)+P(B\overline{C}),$$

故 $P(A)\geqslant P(B)$.

1.3.16　由 $A\cup B\supset A$，有 $0<P(A)\leqslant P(A\cup B)$，从而有

$$\begin{aligned}P((AB)|A\cup B)&=\frac{P((AB)(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P((ABA)\cup(ABB))}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}\\&\geqslant\frac{P(ABA)}{P(A)}=P((AB)|A).\end{aligned}$$

1.3.17　由于

$$1\geqslant P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

从而有

$$\begin{aligned}P(ABC)+1&\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+2P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB\overline{C})-P(A\overline{B}C)-P(BC)\\&\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-P(B\overline{C})-P(\overline{B}C)-P(BC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-[P(B\overline{C})+P(\overline{B}C)+P(BC)]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cup C)\\&\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-1,\end{aligned}$$

故命题成立.

1.3.18　$A_i=\{$第 i 次取到的球为红球$\}$，$i=1,2,\cdots$，$B_j=\{$第 j 次取到的球为白球$\}$，$j=1,2,\cdots$，$A=\{$首次取到白球之前取到红球$\}$，则由独立性有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(A_1B_2)+P(A_1A_2B_3)+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_1)P(B_2)+P(A_1)P(A_2)P(B_3)+\cdots\\&=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\cdots=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left[\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots\right]\\&=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

1.3.19　由 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，有 $P(B)=P(AB)$，从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A),$$

故

$$P(\bar{B}\,|\,\bar{A})=\frac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$$

1.3.20　由 A,B,C 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

从而 $P((AB)C)=P(AB)P(C)$，即 C 与 AB 相互独立．而

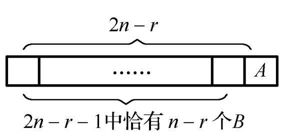
$$\begin{aligned}P((A\cup B)C)&=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)=P(A\cup B)P(C),\end{aligned}$$

故 C 与 $A\cup B$ 相互独立.

1.5　综合提高训练

例 1.5.1　某人有两盒火柴，每盒都有 n 根，每次使用火柴时他在两盒火柴中任取一盒，并从中抽出一根，求他用完一盒时另一盒中还有 $r\ (1\leqslant r\leqslant n)$ 根火柴的概率.

解　用完一盒时另一盒中还有 r 根，表明此人取了 $2n-r$ 次火柴，若两盒火柴分别标记为 A,B，则事件“A 用完，B 中还有 r 根”包含的样本点具有如下特点



这类点的总数为 C_{2n-r-1}^{n-r}，而由独立性有每个样本点对应基本事件的概率均为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-r}$，所以事件“$A$ 用完，B 中还有 r 根”的概率为 $C_{2n-r-1}^{n-r}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-r}$，由对称性有事件“$B$ 用完，A 中

还有 r 根”的概率与之相等，因此用完一盒时另一盒中还有 r 根火柴的概率为

$$2C_{2n-r-1}^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}=C_{2n-r-1}^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}.$$

例 1.5.2　设有甲、乙两个口袋，甲袋中有 9 个白球，1 个黑球，乙袋中有 10 个白球，现从两个口袋中各任取一个球，交换后放回袋中，求三次交换后黑球在乙袋中的概率.

解　由题意，记 $A_i=\{$第 i 次交换时无黑球$\}$，$i=1,2,3$，$B=\{$黑球在乙袋中$\}$，则

$$B=(\overline{A_1}A_2A_3)\cup(A_1\overline{A_2}A_3)\cup(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}).$$

从而

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\overline{A_1}A_2A_3)\cup(A_1\overline{A_2}A_3)\cup(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\\&=P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(A_1A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\\&=\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}+\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}+\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}+\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\\&=3\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}\frac{C_9^1}{C_{10}^1}+\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\frac{C_1^1}{C_{10}^1}\\&=3\times0.1\times(0.9)^2+(0.1)^3=0.244.\end{aligned}$$

例 1.5.3　由以往记录的数据分析，货船运输某种物品的损坏率可能有 2%，10%，90% 三种，三种损坏率发生的概率分别为 0.8，0.15，0.05，现在从运输的物品中随机取 3 件，发现这 3 件都是完好的，试分析这批物品是每种损坏率的概率.

解　由题意，记 $A_1=\{$损坏率为$2\%\}$，$A_2=\{$损坏率为$10\%\}$，$A_3=\{$损坏率为$20\%\}$，$B=\{$三件物品都是完好的$\}$，则有 $P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$，及 $P(B|A_1)=(0.98)^3$，$P(B|A_2)=(0.9)^3$，$P(B|A_3)=(0.1)^3$，从而由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)\\&=(0.98)^3\times0.8+(0.9)^3\times0.15+(0.1)^3\times0.05\approx0.8624,\end{aligned}$$

再由贝叶斯公式有

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{(0.98)^3\times0.8}{0.8624}\approx0.8731,$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{(0.9)^3\times0.15}{0.8624}\approx0.1268,$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{(0.1)^3\times0.05}{0.8624}\approx0.0001.$$

第 2 章 随机变量及其分布

2.1 知 识 要 点

2.1.1 随机变量

设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}$, $X=X(e)$ 是定义在样本空间 S 上实值单值函数，称 $X=X(e)$ 为**随机变量**.

由定义可以看出随机变量是由样本空间到实数域上的映射，但并不是所有的这种映射都是随机变量，能称为随机变量的映射应满足对于任意的实数 x，$\{X\leqslant x\}=\left\{e\,\middle|\,X(e)\leqslant x\right\}$ 是随机试验的事件.

2.1.2 随机变量的分布函数及性质

1．分布函数的定义

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，定义函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty,$$

称 $F(x)$ 为 X 的**分布函数**.

2．分布函数的性质

（1）对 $\forall x\in R$，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

（2）$F(x)$ 是单调不减函数；

（3）$F(x)$ 是右连续的，即 $F(x+0)=F(x)$.

3．利用分布函数求解事件概率的计算公式

（1）$P\{X<b\}=F(b-0)$；

（2）$P\{a<X<b\}=F(b-0)-F(a)$；

（3）$P\{X>b\}=1-P\{X\leqslant b\}=1-F(b)$；

（4）$P\{X\geqslant b\}=1-P\{X<b\}=1-F(b-0)$；

（5）$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$；

（6）$P\{a\leqslant X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$；

（7）$P\{X=b\}=F(b)-F(b-0)$.

2.1.3 离散型随机变量及其分布律

若随机变量 X 全部可能的取值为有限个或可列无限个，则称 X 为**离散型随机变量**．设离散型随机变量 X 全部可能的取值为 $x_i(i=1,2,\cdots)$，对应的概率 $P\{X=x_i\}=p_i$，则表达式

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\cdots.$$

为离散型随机变量 X 的**分布律**．分布律也可以表示为图表的形式，如表 2.1 所示．

表 2.1　离散型随机变量 X 的分布律

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

或表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_1 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}.$$

随机变量 X 的分布律 $p_i, i=1,2,\cdots$ 满足：（1） $p_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots$；（2） $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$.

设随机变量 X 的分布律为 $P\{X_i=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$，分布函数为 $F(x)$，则有

（1） $F(x)=\sum\limits_{x_i\leqslant x}P\{X\leqslant x\}=\sum\limits_{x_i\leqslant x}p_i$ ；

（2） $P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)=\sum\limits_{a<x_i\leqslant b}p_i$.

注　离散型随机变量通过累加分布律的形式得到分布函数（阶梯函数）；反之，分布函数的跳跃点为随机变量可能的取值，而跳跃度为取该值的概率，我们也可以由分布函数得到分布律．图 2.1、图 2.2 直观地说明了上述特点．

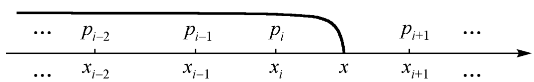


图 2.1　分布律

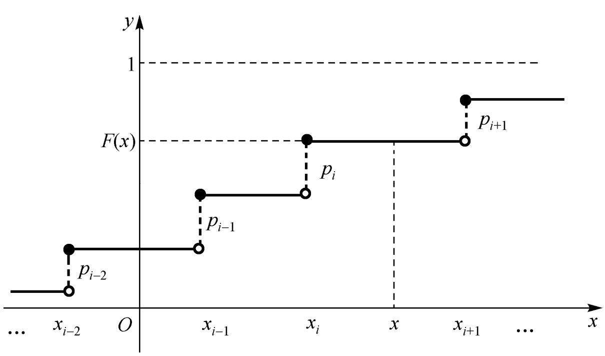


图 2.2　分布函数

2.1.4　常见的离散型随机变量

（1） $(0-1)$ 分布，两点分布

若随机变量 X 的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1,$$

其中 $0<p<1$ 为常数，则称 X 服从参数为 p 的 $(0-1)$ **分布**或**两点分布**．

（2）二项分布

若随机变量 X 的分布律是

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $0<p<1$ 为常数，则称 X 服从参数为 p 的**二项分布**，记为 $X\sim b(n,p)$.

（3）**泊松分布**

若随机变量 X 的分布律是

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为 $X\sim \pi(\lambda)$.

2.1.5　连续型随机变量

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若存在非负函数 $f(x)$，使对任意的实数 x，都有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 为**连续型随机变量**，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**，简称为**概率密度**.

概率密度的性质：

（1）$f(x)\geqslant 0, \forall x\in R$；　　　　（2）$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

概率密度与分布函数的关系：

（1）在 $f(x)$ 的连续点处，有 $F'(x)=f(x)$；

（2）$P\{a<X\leqslant b\}=\int_{b}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

2.1.6　常见的连续型随机变量及性质

（1）均匀分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 服从区间 (a,b) 上的**均匀分布**. 其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

（2）指数分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 θ 的**指数分布**．其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

指数分布具有**无记忆性**，即

$$P\{X>t+s \mid X>t\}=P\{X>s\}.$$

注　指数分布还有一种常用形式

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数。

（3）正态分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 (μ,σ) 的**正态分布或高斯分布**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$．其分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty,$$

特别地，称 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布为**标准正态分布**，其概率密度表达式为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty.$$

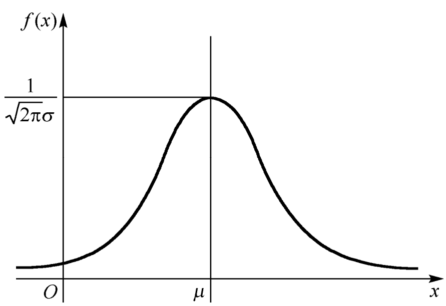


图 2.3　$f(x)$ 的图像

1）正态分布概率密度的性质

① 如图 2.3 所示，$f(x)$ 的图像关于 $x=\mu$ 对称；

② $\left(\mu,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)$ 为 $f(x)$ 的极大值点；

③ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$；

④ $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\mu)$ 上单调递增，在区间 (μ,∞) 上单调递减；

⑤ 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 外有拐点．

2）正态随机变量的一些重要结论

① 正态随机变量的线性函数仍为正态随机变量，即若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，令 $Y=aX+b$，其中 a,b 为常数，且 $a\neq0$，则 $Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$；

② 随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，令 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Z \sim N(0,1)$；

③ 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，分布函数为 $F(x)$，则

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);$$

④ $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

2.1.7　随机变量函数的分布

一般地，若 X 为随机变量，$g(x)$ 为连续函数，则 $g(X)$ 仍为随机变量.

定理　设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f_X(x), -\infty<x<\infty$，$g(x)$ 为连续函数，且满足 $g'(x)>0$（或 $g'(x)<0$），则 $Y=g(X)$ 为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\cdot\left|g^{-1}(y)\right|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\alpha=g(-\infty)$（或 $g(+\infty)$），$\beta=g(+\infty)$（或 $g(-\infty)$）.

2.1.8　分位点

设连续型随机变量的分布函数为 $F(x)$，概率密度函数为 $f(x)$，$0<\alpha<1$，如果存在 x_α 使得

$$P\left\{X\geqslant x_\alpha\right\}=\int_{x_\alpha}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha,$$

则称 x_α 是 $F(x)$ 的上 α **分位点**，如图 2.4 所示.

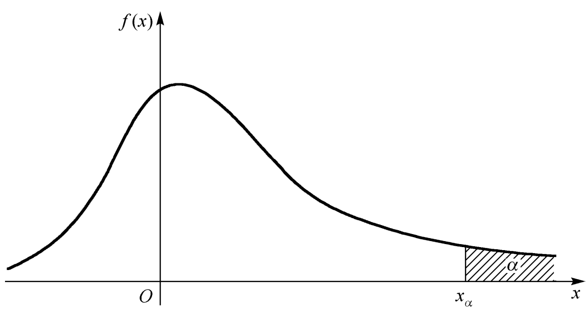


图 2.4　分位点

标准正态分布 $N(0,1)$ 关于 α 的上分位点，记为 z_α（或 u_α）. 由于标准正态分布关于 y 轴对称，因此上 α 分位点满足

$$z_\alpha=-z_{1-\alpha}.$$

2.2　典型例题分析

2.2.1　题型一：随机变量分布的有关问题

本题型主要包含两类问题：一是使用分布律、概率密度、分布函数的性质确定分布中的未知参数；二是使用分布函数的定义讨论分布函数的性质.

例 2.2.1　【1989（4）】设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $A=$________，$P\left\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\right\}=$________.

解　由分布函数右连续的性质，可知 $F\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $1=A\sin\dfrac{\pi}{2}$，解得 $A=1$，从而

$$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=P\left\{-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\right\}=F\left(\frac{\pi}{6}-0\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 2.2.2　设随机变量 X 的分布律为

X	-4	-1	1	2	3
p_i	$\frac{9}{20}$	a	$\frac{1}{20}$	$2a$	$\frac{3}{20}$

其中 a 为未知常数，求 a 的值及 $P\{|X|<2\}$.

解　由随机变量分布律的性质有

$$\frac{9}{20}+a+\frac{1}{20}+2a+\frac{3}{20}=1,$$

解得 $a=\dfrac{7}{60}$，从而

$$P\{|X|<2\}=P\{X=1\}+P\{X=-1\}=\frac{1}{20}+\frac{7}{60}=\frac{1}{6}.$$

例 2.2.3　设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=a\dfrac{\lambda^k}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$. 其中 a,λ 均为正常数，求 a 的值.

解　由随机变量分布律的性质有

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}a\frac{\lambda^k}{k!}=a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=a\mathrm{e}^{\lambda},$$

解得 $a=\mathrm{e}^{-\lambda}$.

例 2.2.4　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a, & x<-1,\\ c+d\arcsin x, & -1\leqslant x<1,\\ b, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

其中的 a,b,c,d 为常数，求 a,b,c,d 的值.

解　由分布函数的性质有

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=b\text{，}\quad 0=\lim_{x\to-\infty}F(x)=a\text{，}$$

再由 X 为连续型随机变量，可知其分布函数 $F(x)$ 为连续函数，特别地在 -1 和 1 处左连续，即有

$$F(-1-0)=F(-1)\text{ 及 }F(1-0)=F(1)\text{，}$$

可推出

$$c-\frac{\pi}{2}d=0\text{，}\quad c+\frac{\pi}{2}d=1.$$

解得 $c=\dfrac{1}{2}$，$d=\dfrac{1}{\pi}$.

例 2.2.5　【2010（3）】设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上的均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0,\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足（　　）.

（A） $2a+3b=4$　　（B） $3a+2b=4$

（C） $a+b=1$　　（D） $a+b=2$

解　由随机变量概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+b\int_0^3\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}\text{，}$$

故 a,b 应满足 $2a+3b=4$，本题选（A）.

例 2.2.6　【2011（3）】设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 是两个分布函数，若其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则下列选项中必为概率密度的是（　　）.

（A） $f_1(x)f_2(x)$　　（B） $2f_2(x)F_1(x)$

（C） $f_1(x)F_2(x)$　　（D） $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

解　由分布函数及概率密度的性质，有 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为非负函数，并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}F_1(x)F_2(x)=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1\text{，}$$

故本题选（D）.

例 2.2.7　【2000（3）】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{2}{9}, & 3\leqslant x\leqslant 6,\\[2mm] 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$，则 k 的取值范围为________.

解　由题意 $P\{X\geqslant k\}=\displaystyle\int_k^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，易见 k 的取值范围为 $[1,3]$.

2.2.2　题型二：随机变量分布的求解及用分布计算概率

该题型读者应注意三个问题：（1）求随机变量的分布时，应该首先分析随机变量的可能取值范围；（2）随机变量的不同分布表达形式之间的转换，离散型随机变量的分布函数为

阶梯型的分段函数，注意自变量的分段形式．连续型随机变量的概率密度函数并不唯一；（3）对于实际问题注意找好与随机变量取值对应的等价事件．

例 2.2.8　设每次试验成功的概率为 p，将试验独立重复地进行，直到第二次成功为止，以 X 表示第一次成功时试验进行的次数，Y 表示第二次成功时试验进行的次数，试求 X,Y 的分布．

解　由题意，X 的可能取值为 $1,2,\cdots$，而 $\{X=m\}$ 等价于"前 $m-1$ 次试验均不成功，第 m 次试验成功"，故 X 的分布律为

$$P\{X=m\}=(1-p)^{m-1}p,\qquad m=1,2,\cdots,$$

Y 的可能取值为 $2,3,\cdots$，而 $\{Y=n\}$ 等价于"前 $n-1$ 次试验中只有一次成功并且第 n 次试验成功"，故 Y 的分布律为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=C_{n-1}^{1}p^{2}(1-p)^{n-2},\quad n=2,3,\cdots.$$

例 2.2.9　设有边长为 1 的正方体无盖容器，内部装有 $\dfrac{3}{4}$ 的液体，四个侧面及底部随机地出现一个漏洞，液体从漏洞漏出，若以 X 表示液面最后的高度，求 X 的分布函数 $F(x)$．

解　由题意，随机变量 X 可能的取值范围是 $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$，并且 $\{X=0\}$ 等价于"漏洞出现在容器的底部"，当 $0<x<\dfrac{3}{4}$ 时，$\{X\leqslant x\}$ 等价于"漏洞出现在容器的底部，或四个侧面的高度小于 x 部分"，从而由几何概型有

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0\leqslant x<\dfrac{3}{4}$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{0<X<x\}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{4x}{5}=\dfrac{1+4x}{5}$；

当 $x\geqslant\dfrac{3}{4}$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\left\{0\leqslant X\leqslant\dfrac{3}{4}\right\}=1$．

所以随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1+4x}{5}, & 0\leqslant x<\dfrac{3}{4},\\ 1, & x\geqslant\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

例 2.2.10　设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_i	1/4	1/4	1/2

求：（1）X 的分布函数；（2）$P\left\{\dfrac{1}{5}<X\leqslant\dfrac{7}{2}\right\}$．

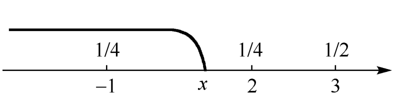


图 2.5　X 的分布律

解　（1）如图 2.5 所示，由分布函数的定义，有

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

当 $-1\leqslant x<2$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4};$$

当 $2\leqslant x<3$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};$$

当 $x\geqslant 3$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{4}, & -1\leqslant x<2,\\ \frac{1}{2}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

（2）$P\left\{\frac{1}{5}<X\leqslant\frac{7}{2}\right\}=F\left(\frac{7}{2}\right)-F\left(\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

例 2.2.11　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求随机变量 X 的分布函数.

解　如图 2.6 所示，由分布函数的定义，

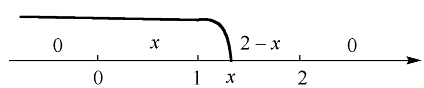


图 2.6　X 的概率密度

当 $x<0$ 时，有

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}x=0;$$

当 $0\leqslant x<1$ 时，有

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}t\,\mathrm{d}t=0+\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x=\frac{x^2}{2};$$

当 $1\leqslant x<2$ 时，有

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}(2-t)\,\mathrm{d}t=0+\frac{1}{2}+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)_1^x$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2x-1;$$

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$.

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

例 2.2.12　【2013（1）】设随机变量 X 服从参数为1的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\leqslant a+1 | Y>a\}=$________.

解　由题意，由条件概率的性质及指数分布的无记忆性有

$$\begin{aligned}P\{Y\leqslant a+1 | Y>a\}&=1-P\{Y>a+1 | Y>a\}=1-P\{Y>1\}=P\{Y\leqslant 1\}\\&=F(1)=1-\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

例 2.2.13　【2010（3）】设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$（　　）.

（A）0　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　（D）$1-\mathrm{e}^{-1}$

解　由题意，由

$$P\{X=1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1},$$

故本题选（C）.

例 2.2.14　设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于3的概率.

解　由题意，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

记 $A=\{X>3\}$，则

$$P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

以 Y 表示三次观测中观测值大于3的次数，则 $Y\sim b\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，因此有

$$P\{Y\geqslant 2\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}.$$

例 2.2.15　某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：小时）都服从

同一指数分布，分布密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 试求在仪器使用的最初200小时内，至少有一只电子元件损坏的概率.

解　由题意，设仪器的寿命为 X，则

$$P\{X\leqslant 200\}=\int_0^{200}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},$$

以 Y 表示在最初200小时内，三只元件损坏的件数，则 $Y\sim b\left(3,1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\right)$，从而

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y<1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\right)^0\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\right)^3=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

2.2.3　题型三：正态随机变量的计算

正态随机变量的概率的计算问题一般采用转化为标准正态，并结合查表的方式进行求解；对于标准正态分布函数 $\Phi(x)$，若自变量小于零，或函数值小于0.5，在查表前要用公式 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ 进行转化.

例 2.2.16　设随机变量 $X\sim N(3,2^2)$，求 $P\{-3\leqslant X\leqslant 5\}$，$P\{|X|\geqslant 2\}$.

解　由题意，并结合查表有

$$\begin{aligned}P\{-3\leqslant X\leqslant 5\}&=P\left\{\frac{-3-3}{2}\leqslant\frac{X-3}{2}\leqslant\frac{5-3}{2}\right\}=\Phi(1)-\Phi(-3)=\Phi(1)+\Phi(3)-1\\&=0.8413+0.9987-1=0.84,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{|X|\geqslant 2\}&=1-P\{-2<X<2\}=1-P\left\{\frac{-2-3}{2}\leqslant\frac{X-3}{2}\leqslant\frac{2-3}{2}\right\}\\&=1-[\Phi(-0.5)-\Phi(-2.5)]=1-[1-\Phi(0.5)]+[1-\Phi(2.5)]\\&=0.6915+1-0.9938=0.6977.\end{aligned}$$

例 2.2.17　设随机变量 $X_1\sim N(0,2^2)$，$X_2\sim N(1,3^2)$，若 $p_j=P\{-2\leqslant X_j\leqslant 2\}$，$j=1,2$，讨论 p_1,p_2 的大小关系.

解　由题意

$$p_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=P\left\{\frac{-2-0}{2}\leqslant\frac{X_1-0}{2}\leqslant\frac{2-0}{2}\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)\ =2\Phi(1)-1,$$

$$p_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant 2\}=P\left\{\frac{-2-1}{3}\leqslant\frac{X_2-1}{3}\leqslant\frac{2-1}{3}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi(-1)=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-1,$$

由于标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 严格单调递增，从而有 $\Phi(1)>\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$，因此 $p_1>p_2$.

例 2.2.18　【2006（3）】设随机变量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有（　　）.

（A）$\sigma_1<\sigma_2$　　（B）$\sigma_1>\sigma_2$　　（C）$\mu_1<\mu_2$　　（D）$\mu_1>\mu_2$

解　由题意，由于

$$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1,$$

$$P\{|Y-\mu_2|<1\}=P\left\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1,$$

所以有 $\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$，再由标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 严格单调递增，从而有 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$，故 $\sigma_1<\sigma_2$，因此本题选（A）.

例 2.2.19　【2013（1，3）】设随机变量 X_1,X_2,X_3 满足 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$P_j=P\{-2\leqslant X_j\leqslant 2\}\ (j=1,2,3)$，则（　　）.

（A）$P_1>P_2>P_3$　（B）$P_2>P_1>P_3$　（C）$P_3>P_1>P_2$　（D）$P_1>P_3>P_2$

解　由于

$$P_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=\int_{-2}^{2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$P_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant 2\}=P\left\{-1\leqslant\frac{X_2}{2}\leqslant 1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$P_3=P\{-2\leqslant X_3\leqslant 2\}=P\left\{\frac{-2-5}{3}\leqslant\frac{X_3-5}{3}\leqslant\frac{2-5}{3}\right\}=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)$$
$$=\int_{-\frac{7}{3}}^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

故有 $P_1>P_2>P_3$，因此本题选（A）.

2.2.4　题型四：求解随机变量函数的分布

从题型上来看主要有离散对离散、连续对离散、连续对连续三种情形；从计算的方法上来看主要有分布函数法、公式法，其中分布函数法适用于一般题型，这种方法的关键在于熟练掌握分布函数的定义及能够找出等价事件，公式法的使用需要满足一定的条件，要求随机变量为连续型，并且函数要求严格单调，并可导.

例 2.2.20　设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求随机变量 $2X+1$，X^2 的分布律.

解　由题意，$2X+1$ 的可能取值为 $-1,1,3$，并且

$$P\{2X+1=-1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4},\quad P\{2X+1=1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{2X+1=3\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2},$$

故 $2X+1$ 的分布律为

$2X+1$	-1	1	3
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

而 X^2 的可能取值为 0,1，并且

$$P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X^2=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

故 X^2 的分布律为

X^2	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

例 2.2.21　设随机变量 X 服从区间 $(1,2)$ 上的均匀分布，求：（1）$Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的概率密度；（2）$Z=-\ln X$ 的概率密度.

解　（1）依题有 Y 的可能取值范围是 $(\mathrm{e}^2,\mathrm{e}^4)$，再由 $y=h(x)=\mathrm{e}^{2X}$ 严格单调递增且可导，其反函数 $h^{-1}(y)=\ln(\sqrt{y})$，及 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由公式有 Y 的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h^{-1}(y)]\cdot\left|[h^{-1}(y)]'\right|, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）Z 的可能取值范围是（$-\ln 2,0$），再由 $z=g(x)=-\ln x$ 严格单调递减且可导，其反函数 $g^{-1}(z)=\mathrm{e}^{-z}$，从而 Z 的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(z)]\left|[g^{-1}(z)]'\right|, & -\ln 2<z<0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}, & -\ln 2<z<0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 2.2.22　【2006（3）】设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解　由题意，随机变量 Y 可能取值在 $[0,4)$ 区间，由分布函数定义，有

当 $y<0$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\left\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y};$$

当$1\leqslant y<4$时，

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$
$$=P\{-1\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y};$$

当$y\geqslant 4$时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$.

故Y的分布函数，概率密度分别为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4.\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8}y^{-\frac{1}{2}}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{8}y^{-\frac{1}{2}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 2.2.23　【2002（3）】假设设备开机后无故障工作的时间X服从指数分布，平均无故障工作的时间(EX)为5小时，设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作2小时便关机．试求该设备每次开机无故障工作的时间Y的分布函数$F(y)$.

解　由题意，X服从参数为$\theta=5$的指数分布，设其分布函数为$F_X(x)$，则

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

Y的可能取值范围是$(0,2]$.

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当$0\leqslant y<2$时，

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant y\}=F_X(y)=1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}};$$

当$y\geqslant 2$时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$.

故Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

例 2.2.24　设随机变量X服从区间$[0,\pi]$上的均匀分布，若令$Y=A\sin X$，其中A为大于零的常数，求Y的概率密度.

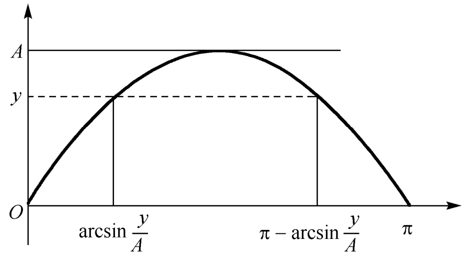


图 2.7　Y的图形

解　由题意Y可取值的范围在$[0,A]$，

当$y<0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当$0\leqslant y<A$时，给合图2.7，有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{A\sin X\leqslant y\}$$
$$=P\left\{0\leqslant X\leqslant \arcsin\frac{y}{A}\right\}+P\left\{\pi-\arcsin\frac{y}{A}\leqslant X\leqslant\pi\right\}$$

$$= F_X\left(\arcsin\frac{y}{A}\right) - F_X(0) + F_X(\pi) - F_X\left(\pi - \arcsin\frac{y}{A}\right);$$

当 $y \geqslant A$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = 1$.

从而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}, & 0 < y < A, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 2.2.25　随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，求随机变量 $-X$，$1-X$，X^2 的分布函数.

解　设 $G_1(x)$，$G_2(x)$，$G_3(x)$ 分别为 $-X$，$1-X$，X^2 的分布函数，由题意有

$$G_1(x) = P\{-X \leqslant x\} = P\{X \geqslant -x\} = 1 - P\{X < -x\} = 1 - F(-x-0),$$

$$G_2(x) = P\{1-X \leqslant x\} = P\{X \geqslant 1-x\} = 1 - P\{X < 1-x\} = 1 - F((1-x)-0),$$

而随机变量 X^2 的取值为非负数，从而

当 $x < 0$ 时，$G_3(x) = P\{X^2 \leqslant x\} = 0$；

当 $x \geqslant 0$ 时，$P\{X^2 \leqslant x\} = P\{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\} = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} - 0)$.

故

$$G_3(x) = \begin{cases} F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} - 0), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

例 2.2.26　若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其分布函数记为 $F(x)$，求随机变量 $F(X)$ 的分布函数.

解法 1　由题意，随机变量 $F(X)$ 的可能取值范围为 $(0,1)$，记 $F(X)$ 的分布函数为 $G(y)$，

当 $y < 0$ 时，$G(y) = P\{F(X) \leqslant y\} = 0$；

当 $0 \leqslant y < 1$ 时，$G(y) = P\{F(X) \leqslant y\} = P\{X \leqslant F^{-1}(y)\} = F[F^{-1}(y)] = y$；

当 $y \geqslant 1$ 时，$G(y) = P\{F(X) \leqslant y\} = 1$.

故

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ y, & 1 < y < 0, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

解法 2　由 X 服从正态分布可知，其分函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调递增且可导，记 $F(X)$ 的概率密度为 $g(y)$，则当 $0 < y < 1$ 时，

$$g(y) = f[F^{-1}(y)] \cdot \left|[F^{-1}(y)]'\right| = f[F^{-1}(y)][F^{-1}(y)]' = \{F[F^{-1}(y)]\}' = y' = 1,$$

从而

$$g(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

故随机变量 $F(X)$ 的分布函数为

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ y, & 1 < y < 0, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

2.3　深 化 训 练

2.3.1　填空题

（1）将一枚均匀的硬币独立地抛掷 5 次，若以 X 表示正面连续出现的次数，则 $P\{X=3\}=$________.

（2）若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=c\left(\dfrac{1}{3}\right)^k, k=0,1,2,\cdots$，其中 c 为正常数，则 $c=$________，$P\{X\geqslant 1\}=$________.

（3）设随机变量 $X\sim b(2,p)$，并且 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则 $p=$________.

（4）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，其中 A,B 均为常数，则 $A=$________，$B=$________.

（5）设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，a 为正常数，则 $P\{X\leqslant a+1 \mid X>a\}=$________.

（6）设随机变量 X 服从 $(0,5)$ 上的均匀分布，则二次方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根的概率是________.

（7）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，$\sigma_1\neq\sigma_2$，若记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-\sigma_1\}$，$p_2=P\{Y>\mu+\sigma_2\}$，则对任意的实数 μ，p_1 与 p_2 的大小关系是________.

（8）设随机变量 $X\sim b(2,0.2)$，由 $\begin{vmatrix} X & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 的分布律为________.

（9）某型号电子产品的寿命服从参数为 3 的指数分布，抽取 50 件产品进行寿命试验，以 X 表示产品寿命大于 3 的件数，则 X 服从的分布是________.

（10）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则 X^3 的分布函数为________.

2.3.2　单项选择题

（1）设 a 是分布函数 $F(x)$ 的一个间断点，则下列表述正确的是（　　）.

（A）$F(x)$ 必为离散型随机变量的分布函数

（B）$F(x)$ 必为连续型随机变量的分布函数

（C）a 为 $F(x)$ 的跳跃间断点

（D）$P\{X=a\}\neq 0$

（2）设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数（　　）.

（A）是连续函数　　（B）至少有两个间断点

（C）是阶梯函数　　（D）恰好有一个间断点

（3）设有边长为 1 的正方体无盖容器，内部装有 $\dfrac{3}{4}$ 的液体，四个侧面及底部随机出现一个漏洞，液体从漏洞漏出，若以 X 表示液面最后的高度，则 X 的分布函数 $F(x)$ 满足（　　）.

（A）恰有一个间断点　　（B）至少有两个间断点

（C）恰有两个间断点　　（D）不能确定

（4）设 $f(x)$ 为某个随机变量的概率密度，则其必满足的性质为（　　）.

（A）单调不减函数　（B）连续函数

（C）非负函数　（D）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

（5）设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为偶函数，其分布函数为 $F(x)$，则对任意常数 $a>0$，$F(-a)=$（　　）.

（A）$2F(a)-1$　（B）$1-F(a)$　（C）$\dfrac{1}{2}-F(a)$　（D）$F(a)$

（6）设 $a,b\,(a\leqslant b)$ 为常数，随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，下列选项错误的是（　　）.

（A）$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$　（B）$P\{a\leqslant X<b\}=F(b-0)-F(a)$

（C）$P\{a\leqslant X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$　（D）$P\{X=a\}=0$

（7）可以使 $f(x)=-\sin x$ 成为概率密度的 x 取值范围是（　　）

（A）$\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$　（B）$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　（C）$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$　（D）$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$

（8）下列函数中可以作为分布函数的是（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0.3, & 0<x\leqslant 1,\\ 0.5, & 1<x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$　（B）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\leqslant x<3,\\ 0.2, & 3\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0.5, & 0<x\leqslant 2,\\ 0.25, & 2<x\leqslant 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$　（D）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\leqslant x<1,\\ 0.4, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

（9）设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，当 μ 减小，σ 增大时，事件 $\{|X-\mu|<\sigma\}$ 的概率（　　）.

（A）单调递减　（B）单调递增

（C）保持不变　（D）条件不足，不能确定

（10）设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha\in(0,1)$，数 z_α 满足 $P\{X>z_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（　　）

（A）$z_{\frac{\alpha}{2}}$　（B）$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$　（C）$z_{\frac{1-\alpha}{2}}$　（D）$z_{1-\alpha}$

2.3.3　已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}c+d\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中 c,d 为未知常数，求：（1）c,d 的值；（2）X 的概率密度；（3）$P\{\ln 9\leqslant X\leqslant \ln 16\}$.

2.3.4　已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}c\,\mathrm{e}^{-2(x-d)}, & x\geqslant d,\\ 0, & x<d,\end{cases}$$

其中 c,d 均为常数，且 $c>0$，若 $P\{0<X<\ln 2\}=\dfrac{1}{2}$，试求 c,d 的值.

2.3.5　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x}, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 k 为未知常数，求：（1）k 的值；（2）X 的分布函数；（3）$P\left\{\dfrac{1}{2}\leqslant X\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$.

2.3.6　假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $X(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

（1）求相继两次故障之间的时间间隔 Y 的概率分布；

（2）求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 p .

2.3.7　设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{X<9\}=0.975$，$P\{X<2\}=0.062$，求 $P\{X>6\}$.

2.3.8　设随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=-1\}=\dfrac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$，在 $\{-1<X<1\}$ 发生的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内任意子区间上取值的条件概率与该区间长度成正比，求：（1）X 的分布函数 $F(x)$；（2）$P\{X<0\}$.

2.3.9　已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

令 $Y=|X-1|$，求 Y 的概率密度 $f(y)$.

2.3.10　随机变量 X 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，证明 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

2.3.11　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=\max\{X,\mu\}$，求 Y 的分布函数 $F(y)$.

2.3.12　设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为偶函数，其分布函数为 $F(x)$，对于任意的常数 $a>0$，证明：

（1）$F(-a)=1-F(a)$；（2）$P\{|X|<a\}=2F(a)-1$.

2.3.13　设 $F(x)$ 是连续型随机变量的分布函数，对于任意的常数 $a>0$，证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+a)-F(x)]\mathrm{d}x=a .$$

2.4　深化训练详解

2.3.1　填空题

（1）$\dfrac{2^5}{5}$；　（2）$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$；　（3）$\dfrac{1}{3}$；　（4）$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\pi}$；

（5）$1-\mathrm{e}^{-1}$；**提示**　由指数分布的无记忆性，可知

$$P\{Y\leqslant a+1|Y>a\}=1-P\{Y>a+1|Y>a\}=1-P\{Y>1\}=P\{Y\leqslant 1\}=F(1)=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

（6）$\frac{3}{5}$；**提示**　方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根的条件是

$$\Delta=16X^2-16(X+2)=16(X+1)(X-2)\geqslant 0,$$

解得 $X\geqslant 2$ 或 $X\leqslant -1$，由 X 服从 $(0,5)$ 上的均匀分布，故 $P\{2\leqslant X\leqslant 5\}=\frac{3}{5}$.

（7）$p_1=p_2$；　（8）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0.64 & 0.32 & 0.04 \end{pmatrix}$；　（9）$b(50,\mathrm{e}^{-1})$；

（10）$F(\sqrt[3]{x})$．**提示**　设 X^3 的分布函数为 $G(x)$，则

$$G(x)=P\left\{X^3\leqslant x\right\}=P\left\{X\leqslant\sqrt[3]{x}\right\}=F(\sqrt[3]{x}).$$

2.3.2　单项选择题

（1）（D）；（2）（D）；（3）（C）；（4）（C）；（5）（B）；（6）（D）；（7）（A）；（8）（D）；（9）（C）；（10）（C）；（11）（C）.

2.3.3　（1）由连续型随机变量分布函数的性质有

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(c+d\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)=c,$$

$$c+d=F(0)=F(0-0)=\lim_{x\to 0^-}F(x)=0,$$

可解得 c=1，$d=-1$，从而 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

（2）由分布函数与概率密度的关系，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

（3）$P\{\ln 9\leqslant X\leqslant \ln 16\}=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\ln 16}{2}}\right)-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\ln 9}{2}}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

2.3.4　由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，有

$$1=\int_d^{+\infty}c\,\mathrm{e}^{-2(x-d)}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-d}c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\frac{c}{2},$$

解得 $c=2$．若 $d\geqslant\ln 2$，显然不符合题意；

若 $0\leqslant d<\ln 2$，由

$$\frac{1}{2}=P\{0<X<\ln 2\}=\int_0^d 0\mathrm{d}t+\int_d^{\ln 2}2\,\mathrm{e}^{-2(x-d)}\mathrm{d}x,$$

解得 $d=\frac{1}{2}\ln 2$；

若 $d<0$，由

$$\frac{1}{2}=P\{0<X<\ln 2\}=\int_0^{\ln 2} 3\,\mathrm{e}^{-2(x-d)}\mathrm{d}x\,,$$

解得 $d=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$.

2.3.5 （1）由概率密度的性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{k}{x}\mathrm{d}x=k\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}=k(\ln\mathrm{e}-\ln 1)=k\,,$$

解得 $k=1$.

（2）由分布函数的定义有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\\ 1, & x\geqslant\mathrm{e},\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\\ 1, & x\geqslant\mathrm{e}.\end{cases}$$

（3）$P\left\{\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3}{2}\right\}=P\left\{\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{3}{2}\right\}=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}=\ln 3-\ln 2$.

2.3.6 （1）由题意，$X(t)\sim\pi(\lambda t)$，Y 的可能取值范围是 $[0,\infty)$，从而

当 $y<0$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $y\geqslant 0$ 时，注意到事件 $\{Y>y\}$ 表示在时间间隔 y 内设备没有发生故障，其与 $\{X(y)=0\}$ 等价，故

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1-P\{Y>y\}=1-P\{X(y)=0\}=1-\frac{(\lambda y)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda y}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\,;$$

因此 Y 服从参数为 λ 的指数分布.

（2）由指数分布的无记忆性，有

$$p=P\{Y>16\,|\,Y>8\}=P\{Y>8\}=1-P\{Y\leqslant 8\}=\mathrm{e}^{-8y}\,.$$

2.3.7 由于 X 服从正态分布，从而有

$$P\{X<9\}=\Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right)=0.975\,,\quad P\{X<2\}=\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)=0.062\,,$$

再由标准正态分布的性质有

$$\Phi\left(\frac{\mu-2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)=1-0.062=0.938\,,$$

经查表 $\frac{9-\mu}{\sigma}=1.96$，$\frac{\mu-2}{\sigma}=1.54$，联立方程组，可解得 $\mu=5.08$，$\sigma=2$，因此

$$P\{X>6\}=1-P\{X\leqslant 6\}=1-\Phi\left(\frac{6-5.08}{2}\right)=1-\Phi(0.46)=0.3228\,.$$

2.3.8 （1）由题意，随机变量 X 的取值范围是 $[-1,1]$，设正比系数为 k，由

$$\begin{aligned}1&=P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}=P\{X=-1\}+P\{-1<X<1\}+P\{X=1\}\\&=\frac{1}{8}+k[1-(-1)]+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+2k\,,\end{aligned}$$

解得 $k=\dfrac{5}{16}$．从而

当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}+P\{-1<X<x\}=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}(x+1)=\frac{5x+7}{16};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$．综上，

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

（2）$P\{X<0\}=P\{X\leqslant 0\}=\dfrac{7}{16}$．

2.3.9　由题意，随机变量 Y 的取值范围是 $[0,1)$，从而

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X-1|\leqslant y\}=P\{-y\leqslant X-1\leqslant y\}=P\{1-y\leqslant X\leqslant y+1\}$$

$$=\int_{1-y}^{1+y}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1-y}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{1+y}2-x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1-y}^{1}+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_{1}^{1+y}$$

$$=2y-y^2;$$

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$．

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 2y-y^2, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

2.3.10　**证法 1**　由题意，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

Y 的可能取值范围是 $(0,1)$．从而

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\right\}=P\left\{\mathrm{e}^{-2X}\geqslant 1-y\right\}=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}$$

$$=F\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)=1-\mathrm{e}^{-2\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}=1-\mathrm{e}^{\ln(1-y)}=1-(1-y)=y;$$

当 $y \geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = 1$.

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leqslant y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1, \end{cases}$$

即 Y 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

证法 2　由题意，X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

Y 的可能取值范围是 $(0,1)$，再由 $y = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$ 严格单调递增且可导，其反函数为 $x = -\dfrac{1}{2}\ln(1-y)$，反函数的导函数为 $x' = -\dfrac{1}{2(1-y)}$，从而当 $0 < y < 1$ 时，Y 的概率密度

$$f(y) = f(x)\left|x'\right| = 2\,\mathrm{e}^{-2\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}\left|x'\right| = 2(1-y)\left|-\frac{1}{2(1-y)}\right| = 1,$$

故 Y 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

即 Y 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

2.3.11　由题意，随机变量 Y 的可能取值为 $[\mu, +\infty)$，当 $y < \mu$ 时，$P\{Y \leqslant y\} = 0$；当 $y \geqslant \mu$ 时，

$$P\{Y \leqslant y\} = P\{\max\{X, \mu\} \leqslant y\} = P\{X \leqslant y\} = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right),$$

故 Y 的分布函数

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < \mu, \\ \Phi\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right), & y \geqslant \mu. \end{cases}$$

2.3.12　（1）由 $f(x)$ 为偶函数，有 $f(x) = f(-x)$，从而

$$F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-a} f(-x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令} t = -x} \int_{\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_{a}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 1 - F(a),$$

（2）由（1）有

$$P\{|X| < a\} = P\{-a < X < a\} = P\{-a < X \leqslant a\} = F(a) - F(-a)$$

$$= F(a) - [1 - F(a)] = 2F(a) - 1.$$

2.3.13　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，由概率密度的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[F(x+a)-F(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x}^{x+a}f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \xlongequal{令 t=y-x} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{a}f(t+x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{a}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=x+t} \int_{0}^{a}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{a}1\mathrm{d}t=a.$$

2.5　综合提高训练

例 2.5.1　设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X 和 Y 的分布函数，非负常数 a,b 满足 $a+b=1$，若令 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$，证明 $F(x)$ 也可以是随机变量的分布函数，并由此说明存在随机变量即非离散型又非连续型.

证　（1）由分布函数具有单调不减的性质，以及 a，b 非负，有对于任意的 $x_1<x_2$，

$$F(x_2)-F(x_1)=aF_1(x_2)+bF_2(x_2)-[aF_1(x_1)+bF_2(x_1)]$$
$$=a[F_1(x_2)-F_1(x_1)]+b[F_2(x_2)-F_2(x_1)]\geqslant 0,$$

因此 $F(x)$ 单调不减，

（2）由分布函数极限的性质，以及 $a+b=1$，有

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}[aF_1(x)+bF_2(x)]=a\lim_{x\to+\infty}F_1(x)+b\lim_{x\to+\infty}F_2(x)=a+b=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}[aF_1(x)+bF_2(x)]=a\lim_{x\to-\infty}F_1(x)+b\lim_{x\to-\infty}F_2(x)=0+0=0,$$

（3）根据分布函数右连续的性质，对于任意的 x_0，有

$$F(x_0+0)=aF_1(x_0+0)+bF_2(x_0+0)=aF_1(x_0)+bF_2(x_0)=F(x_0),$$

因此 $F(x)$ 右连续，综上所述，$F(x)$ 可以为某一个随机变量的分布函数．令

$$a=b=\frac{1}{2},\quad F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}\quad F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

显然 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 均为分布函数，由已证有

$$F(x)=\frac{1}{2}F_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

也为分布函数．而由 $F(0)=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-0}=\dfrac{1}{2}$，$F(0+0)=0$，可知 $F(x)$ 并非连续函数（有一个间断点），同时又在 $[0,\infty)$ 上严格递增，所以服从该分布的随机变量既不是离散型也不是连续型.

例 2.5.2　【2013（1）】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，令

$$Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$$

求：（1）Y 的分布函数；（2）概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

解　（1）由概率密度的性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{1}{a}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=\frac{1}{a}\cdot 9,$$

解得 $a=9$，从而

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

记 Y 的分布函数为 $F(y)$，由题意，Y 的可能取值范围在 $[1,2]$ 区间，并且当 $y<1$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；当 $1\leqslant y<2$ 时，

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y<y\}=P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X<y\}\\&=\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{19}{27}+\frac{y^3-1}{27}=\frac{y^3+18}{27};\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$；从而有

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

（2）由全概率公式有

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant Y\}&=P\{X\leqslant Y|X\leqslant 1\}P\{X\leqslant 1\}+P\{X\leqslant Y|1<X<2\}P\{1<X<2\}\\&\quad+P\{X\leqslant Y|X\geqslant 2\}P\{X\geqslant 2\}\\&=P\{X\leqslant 1\}+P\{1<X<2\}+0\\&=P\{X<2\}=\int_0^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27}.\end{aligned}$$

例 2.5.3　【2015（1，3）】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 次大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数．求：

（1）Y 的概率分布；　　（2）$E(Y)$.

解　（1）由题意，Y 的可能取值为 $2,3,\cdots,n,\cdots$，并且

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^1p^1(1-p)^{n-2}p,$$

记观测值大于 3 的概率为 p，则

$$p=\int_3^{\infty}2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.$$

从而Y的概率分布为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^1p^1(1-p)^{n-2}p=(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

（2）$E(Y)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nP\{Y=n\}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}=16$.

例 2.5.4 【2014（1，3）】设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i),\ i=1,2$．求：

（1）Y的分布函数$F_Y(y)$；　（2）$E(Y)$．

解　（1）由题意Y可取值的范围在$(0,2)$区间，并且当$y\leqslant 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；当$0\leqslant y<1$时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y|X=1\}P\{X=1\}+P\{Y\leqslant y|X=2\}P\{X=2\}\\&=P\{Y\leqslant y|X=1\}\times\frac{1}{2}+P\{Y\leqslant y|X=2\}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^y 1\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y=\frac{3}{4}y;\end{aligned}$$

当$1\leqslant y<2$时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y|X=1\}P\{X=1\}+P\{Y\leqslant y|X=2\}P\{X=2\}\\&=P\{Y\leqslant y|X=1\}\frac{1}{2}+P\{Y\leqslant y|X=2\}\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}y;\end{aligned}$$

当$y>2$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$．因此$Y$的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3}{4}y, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

（2）由（1）可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{3}{4}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x=1\,.$$

例 2.5.5　【2003（3）】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1<x<8,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ $F(x)$ 是 X 的分布函数，求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

解　由题意，X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}y, & 1\leqslant x<8,\\ 1, & x\geqslant 8\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1,\\ x^{\frac{1}{3}}-1 & 1\leqslant x<8,\\ 1, & x\geqslant 8,\end{cases}$$

Y 的可能取值范围是 $(0,1)$ 区间，记随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}=P\left\{X^{\frac{1}{3}}-1\leqslant y\right\}\\&=P\left\{X\leqslant (y+1)^3\right\}=F((y+1)^3)=y\,,\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 1$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$，故 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

第 3 章　多维随机变量及其分布

3.1　知 识 要 点

3.1.1　联合分布函数的概念性质

（1）**联合分布函数**　二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty.$$

（2）**性质**　分布函数 $F(x,y)$ 具有如下基本性质：

① $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且对于任意固定的 y，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$；对于任意固定的 x，$\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$；以及 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}F(x,y)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1$.

② $F(x,y)$ 是 x 和 y 的不减函数，即对于任意固定的 y，当 $x_2>x_1$ 时，$F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$；对于任意固定的 x，当 $y_2>y_1$ 时，$F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$.

③ $F(x,y)$ 分别关于 x,y 是右连续的.

④ 对于任意的 $x_1<x_2, y_1<y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geqslant 0.$$

3.1.2　二维离散型随机变量

（1）**联合分布律**　二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

其中 $p_{ij}\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$；联合分布律也可记为如表 3.1 所示的形式.

表 3.1　联合分布律

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

（2）**联合分布函数**　二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij}.$$

（3）**边缘分布律**　二维离散型随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}\quad (i=1,2,\cdots),$$

或记为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$p_{i.}$	$p_{1.}$	$p_{2.}$	$\cdots$	$p_{i.}$	$\cdots$

二维离散型随机变量 (X,Y) 关于 Y 的**边缘分布律**为

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}\quad (j=1,2,\cdots),$$

或记为

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
$p_{.j}$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\cdots$	$p_{.j}$	$\cdots$

（4）**条件分布律**　设 $P\{Y=y_j\}>0$，则 (X,Y) 在 $\{Y=y_j\}$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots,$$

或记为

$X=x_i$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}$	$\dfrac{p_{1j}}{p_{.j}}$	$\dfrac{p_{2j}}{p_{.j}}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{ij}}{p_{.j}}$	$\cdots$

设 $P\{X=x_i\}>0$，则 (X,Y) 在 $\{X=x_i\}$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots,$$

或记为

$Y=y_j$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}$	$\dfrac{p_{i1}}{p_{i.}}$	$\dfrac{p_{i2}}{p_{i.}}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{ij}}{p_{i.}}$	$\cdots$

3.1.3　二维连续型随机变量

（1）**联合概率密度**　设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 x，y，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数，简称概率密度，或称为随机变量 X 与 Y 的联合概率密度函数.

（2）**性质**　联合概率密度 $f(x,y)$ 具有如下性质：

① $f(x,y)\geqslant 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

③ 设 G 是 xOy 平面上的区域，点 $(X\ ,\ Y)$ 落在 G 内的概率为

$$P\{(X\ ,\ Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;$$

④ 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)\ .$$

（3）**边缘概率密度**　二维随机变量 (X,Y) 分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad -\infty<x<+\infty\ .$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,\quad -\infty<y<+\infty\ .$$

（4）**条件概率密度**　设 $f_Y(y)>0$，在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ .$$

设 $f_X(x)>0$，在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\ .$$

（5）**边缘分布函数**　(X,Y) 分别关于 X 和 Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\ ,$$

在 $Y=y$ 的条件下 X 的**条件分布函数**为

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x\,|\,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x\ ,$$

在 $X=x$ 的条件下 Y 的**条件分布函数**为

$$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y\,|\,x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y\ .$$

3.1.4　随机变量的独立性

设 $F(x,y),F_X(x),F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数，如果对于任意实数 x,y 都有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\ ,$$

则称随机变量 X 与 Y **相互独立**.

对于二维离散型随机变量 (X,Y)，对任何一组可能的取值(x_i,y_j)，都有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

则随机变量 X 与 Y 相互独立.

对于二维连续型随机变量 (X,Y)，设 $f(x,y)$，$f_X(x),f_Y(y)$ 分别为 (X,Y) 的概率密度和边缘概率密度，若对于任意的实数 x,y，都有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

3.1.5　随机变量函数的分布

已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$，$Z=g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{g(x_i,y_j)=z_k}p_{ij}.$$

已知二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$，$Z=g(X, Y)$，其中 g 连续，则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\leqslant Z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若 Z 为连续型随机变量，则 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}.$$

下面列出一些常见随机变量函数的分布.

（1）**和的分布**　设 X 与 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$，随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x \text{ 或 } f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

（2）**商的分布**　设 X 与 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$，随机变量 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,zx)\mathrm{d}x.$$

（3）**积的分布**　设 X 与 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$，随机变量 $Z=XY$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

（4）$Z=\max\{X,Y\}$ **的分布**　设 X、Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，$Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

（5）$K=\min\{X,Y\}$ **的分布**　设 X、Y 是两个相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，$K=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_K(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

3.1.6　常见的二维分布

（1）如果二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积，则称 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布，记为 $(X,Y)\sim U(D)$.

（2）如果二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ 都是常数，且 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$|\rho|\leqslant 1$，则称 (X,Y) 服从参数为 μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ 的二维正态分布，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_1^2;\rho).$$

若二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_1^2;\rho)$，则有

① 边缘分布仍为正态分布，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；

② X 与 Y 是相互独立的 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$；

③ X 与 Y 的线性组合仍是正态分布，即

$$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho).$$

3.2　典型例题分析

3.2.1　题型一：二维离散型随机变量的相关问题

例 3.2.1　将两封信随机投入编号为 A、B、C、D 的四个邮筒内．设 X 、Y 分别表示第一、二个邮筒内信件的数目．试求：

（1）(X,Y) 的分布律和边缘分布律；

（2）$X=1$ 时 Y 的分布律，$Y=1$ 时 X 的分布律；

（3）$P\{X+Y<2)$；

（4）判断 X 与 Y 是否相互独立；

（5）$\max\{X,Y\}$ 的分布律．

解　（1）(X,Y) 的分布律及边缘分布律如表 3.2 所示．

表 3.2　分布律及边缘分布律

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{6}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{16}$
$P\{Y=y_i\}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$	

（2） $X=1$时 Y 的分布律为

Y	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3） $P\{X+Y<2\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{3}{4}$.

（4）由于

$$P\{X=2,Y=2\}\neq P\{X=2\}P\{Y=2\},$$

故 X 与 Y 不独立.

（5） $\max\{X,Y\}$ 的分布律为

$\max\{X,Y\}$	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

例 3.2.2　二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律由如下函数给出

$$f(x,y)=\begin{cases} c\,|x-y|, & x,y=-2,0,1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：（1）常数 c 的值；（2） $P\{|X-Y|\leqslant 1\}$, $P\{|X+Y|=1\}$；（3） $X=0$ 时， Y 的条件分布律.

解　（1） (X,Y) 的分布律如表 3.3 所示.

表 3.3　分布律

Y \ X	−2	0	1
−2	0	$2c$	$3c$
0	$2c$	0	c
1	$3c$	c	0

根据分布律的性质有

$$2c+3c+2c+c+3c+c=1,$$

故 $c=\dfrac{1}{12}$；

（2） $P\{|X-Y|<1\}=P\{X=-2,Y=-2\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=0$；

$$\begin{aligned} P\{|X+Y|=1\}&=P\{X=-2,Y=1\}+P\{X=0,Y=1\} \\ &\quad+P\{X=1,Y=-2\}+P\{X=1,Y=0\} \\ &=\frac{2}{3}; \end{aligned}$$

（3） $X=0$ 时， Y 的条件分布律为 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

例 3.2.3　随机变量 $X \sim N(0,1)$，设随机变量 $X_k = \begin{cases} 0, & 若X \geqslant k, \\ 1, & 否则, \end{cases}$ $k=1,2$.

试求：（1）(X_1,X_2) 的分布律；（2）$P\{X_1+X_2 \leqslant 1 \mid X_2=1\}$；（3）判断 X_1 与 X_2 是否相互独立.

解　（1）由于

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{X\geqslant 1,X\geqslant 2\}=P\{X\geqslant 2\}=1-\Phi(2)=0.023,$$

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X<1,X<2\}=P\{X<1\}=\Phi(1)=0.841,$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X\geqslant 1,X<2\}=P\{1\leqslant X<2\}=\Phi(2)-\Phi(1)=0.136,$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X<1,X\geqslant 2\}=0.$$

故 (X_1,X_2) 的分布律如表 3.4 所示.

表 3.4　分布律

X_2 \ X_1	0	1
0	0.023	0
1	0.136	0.841

（2）
$$P\{X_1+X_2\leqslant 1 \mid X_2=1\}=\frac{P\{X_1+X_2\leqslant 1,X_2=1\}}{P\{X_2=1\}}$$
$$=\frac{P\{X_1=0,X_2=1\}}{P\{X_1=0,X_2=1\}+P\{X_1=1,X_2=1\}}$$
$$=\frac{0.136}{0.841+0.136}=0.139;$$

（3）由于

$$P\{X_1=1,\ X_2=0\}\neq P\{X_1=1\}P\{X_2=0\},$$

故 X_1 与 X_2 不相互独立.

例 3.2.4　设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	-2	0	2
p	0.3	0.2	0.5

Y	-1	0
p	0.2	0.8

试求：（1）(X,Y) 的分布律；（2）$P\{X>Y\}$；（3）$Z=X^2+Y$ 的分布律.

解　（1）(X,Y) 的分布律如表 3.5 所示.

表 3.5　分布律

Y \ X	-2	0	2	$p_{\cdot j}$
-1	0.06	0.04	0.1	0.2
0	0.24	0.16	0.4	0.8
$p_{i\cdot}$	0.3	0.2	0.5	

（2）
$$P\{X>Y\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=2,Y=-1\}+P\{X=2,Y=0\}$$
$$=0.04+0.1+0.4=0.54;$$

（3）$Z=X^2+Y$ 的分布律为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0.04 & 0.16 & 0.16 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

例 3.2.5　设随机变量 (X,Y) 的分布律如表 3.6 所示.

表 3.6　分布律

Y \ X	0	1	2	3
−1	0.2	0	0.1	B
1	0.03	A	0.15	0.3

且 Y 的边缘分布列为 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$．试求：

（1）常数 A 和 B 的值；（2）$P\{2X+Y\geqslant 3 \mid X<2\}$；（3）$Z=|X-Y|$ 的分布列.

解　（1）由 (X,Y) 的分布律可得，Y 的边缘分布律为：

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.3+B & 0.48+A \end{pmatrix},$$

因此 $0.3+B=0.4$，$0.48+A=0.6$，解得 $A=0.12$，$B=0.1$.

（2）$P\{2X+Y\geqslant 3 \mid X<2\}=\dfrac{P\{2X+Y\geqslant 3, X<2\}}{P\{X<2\}}=\dfrac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=0\}+P\{X=1\}}$

$$=\frac{0.12}{0.35}=0.343.$$

（3）$Z=|X-Y|$ 的分布律为

Z	0	1	2	3	4
p	0.12	0.38	0.3	0.1	0.1

例 3.2.6　设随机变量 X 与 Y 的分布律分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	−1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$，试求：

（1）(X,Y) 的分布律；（2）$Y=0$ 的条件下，X 的分布律；（3）$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布.

解　（1）$P\{X^2=Y^2\}=P\{X=Y\}+P\{X=-Y\}$

$$=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=1.$$

因此根据分布律的性质，有

$$P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0,$$

即

$$P\{X=0,Y=-1\}=0,\quad P\{X=1,Y=0\}=0,\quad P\{X=0,Y=1\}=0,$$

而

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3},$$

因此 (X,Y) 的分布律如表 3.7 所示.

表 3.7　分布律

Y \ X	0	1
−1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

（2）由于

$$P\{X=0\mid Y=0\}=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=1,$$

$$P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=0,$$

因此 $Y=0$ 的条件下，X 的分布律为

$X=k$	0	1
$P\{X=k\mid Y=0\}$	1	0

（3）$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布律为

Z	−1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

例 3.2.7　设随机事件 A,B 满足

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B\mid A)=\frac{1}{3},\ P(A\mid B)=\frac{1}{2},$$

令

$$X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生.\end{cases}$$

试求：（1）(X,Y) 的分布律及边缘分布律；（2）$P\{XY=0\}$；（3）X 与 Y 至少有一个大于 $\frac{1}{2}$ 的概率.

解　（1）由题意

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\qquad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

因此

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}.$$

从而 (X,Y) 联合分布律及边缘分布律如表 3.8 所示.

表 3.8　联合分布律及边缘分布律

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

（2） $P\{XY=0\}=1-P\{XY\neq 0\}=1-P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{11}{12}$；

（3） $$P\left\{X>\frac{1}{2}\cup Y>\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}+P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}-P\left\{X>\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right\}$$
$$=P\{X=1\}+P\{Y=1\}-P\{X=1,Y=1\}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

3.2.2　题型二：二维连续型随机变量的相关问题

例 3.2.8　设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ky^2, & 0<x<1-y^2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：（1）常数 k 的值；（2） $P\{2X>3Y\}$；（3）条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$；（4）判断 X 与 Y 是否相互独立；（5） $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解　（1）如图 3.1 所示，由密度函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{1-y^2} ky^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} ky^2(1-y^2)\mathrm{d}x=1,$$

故 $k=\dfrac{15}{4}$；

（2）如图 3.2 所示，

$$P\{2X>3Y\}=1-P\{2X\leqslant 3Y\}=1-\iint\limits_{2x\leqslant 3y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=1-\int_0^{3/4}\left(\int_{2x/3}^{\sqrt{1-x}}\frac{15}{4}y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=1-\int_0^{3/4}\left[\frac{5}{4}(1-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{10}{27}x^3\right]\mathrm{d}x$$
$$=1-\frac{233}{512}=\frac{279}{512}.$$

（3）X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}}\frac{15}{4}y^2\mathrm{d}y, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{5}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

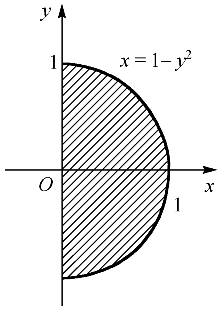


图 3.1　示意图

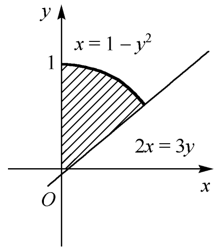


图 3.2　示意图

因此当 $0<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{15}{4}y^2}{\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}}}, & -\sqrt{1-x}<y<\sqrt{1-x},\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}, & -\sqrt{1-x}<y<\sqrt{1-x},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

类似地，Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{15}{4}y^2(1-y^2), & -1<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此当 $-1<y<1$ 且 $y\neq 0$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{15}{4}y^2}{\frac{15}{4}y^2(1-y^2)}, & 0<x<1-y^2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y^2}, & 0<x<1-y^2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（4）由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 非几乎处处成立，故 X 与 Y 不独立；

（5）如图 3.3 所示，

$$f(z-y,y)=\begin{cases}\frac{15}{4}y^2, & 0<z-y<1-y^2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

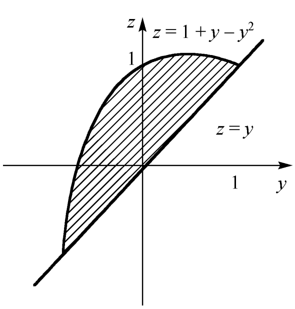


图 3.3　示意图

根据 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}-z}}^{z}\frac{15}{4}y^2\mathrm{d}y, & -1<z<1,\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}-z}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}-z}}\frac{15}{4}y^2\mathrm{d}y, & 1\leqslant z<\dfrac{5}{4},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{5}{4}z^3-\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{5}{4}-z}\right)^3, & -1<z<1,\\ \dfrac{5}{2}(2-z)\sqrt{\dfrac{5}{4}-z}, & 1\leqslant z<\dfrac{5}{4},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.2.9　设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}A(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：（1）常数 A 的值；（2）边缘分布函数 $F_X(x),F_Y(y)$；（3） $P\{1\leqslant X\leqslant 5,Y>2\}$.

解　（1）由分布函数的性质有

$$1=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}A(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y})=A\text{，}$$

故 $A=1$.

（2）

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{y\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y})=1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{X<+\infty,Y\leqslant y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y})=1-\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3） $P\{1\leqslant X\leqslant 5,Y>2\}=F(5,+\infty)+F(1-0,2)-F(5,2)-F(1-0,+\infty)$

$$=(1-\mathrm{e}^{-5})+(1-\mathrm{e}^{-1})(1-\mathrm{e}^{-4})-(1-\mathrm{e}^{-5})(1-\mathrm{e}^{-4})-(1-\mathrm{e}^{-1})$$

$$=\mathrm{e}^{-5}-\mathrm{e}^{-9}.$$

例 3.2.10　设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：（1）常数 k 的值；（2） $P\{X<1,Y<3\}$ ；（3）边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$.

解　（1）如图 3.4 所示，由密度函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=8k=1,$$

故 $k=\dfrac{1}{8}$.

（2）如图 3.5 所示，

$$P\{X<1,Y<3\}=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{2}^{3}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{8}.$$

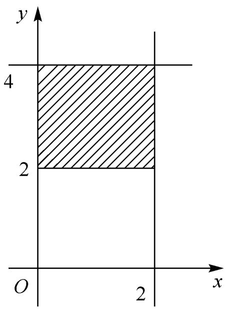


图 3.4　示意图

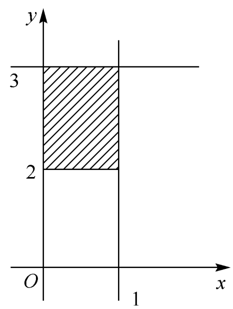


图 3.5　示意图

（3） X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{2}^{4}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3-x}{4}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{0}^{2}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x, & 2<y<4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{5-y}{4}, & 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.2.11　二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,1<x<\mathrm{e}^2,0<y<\frac{1}{x}\right\}$ 上服从均匀分布，试求：

（1） $P\left\{X<\frac{3}{2}\middle|Y>\frac{1}{2}\right\}$；（2） $P\left\{X<\frac{3}{2}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}$.

解　如图 3.6 所示，区域 D 的面积为

$$S=\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_{1}^{\mathrm{e}^2}=2.$$

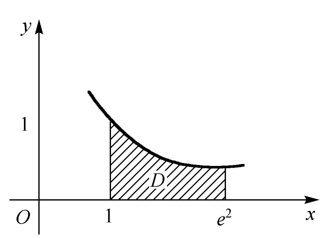


图 3.6　示意图

(X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2,0<y\leqslant\frac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）由于

$$P\left\{X<\frac{3}{2},Y>\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{x<\frac{3}{2},\,y>\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_1^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{8}=0.0777,$$

$$P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{y>\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=0.0966,$$

故

$$P\left\{X<2\,\middle|\,Y>\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{X<\frac{3}{2},Y>\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}}=\frac{0.0777}{0.0966}=0.8047.$$

（2）由于

$$P\left\{X<\frac{3}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{2}\right\}=\int\limits_{x<2} f_{X|Y}(x\,|\,0.5)\mathrm{d}x\,,$$

而 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x, & 0<y\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^2},\\ \int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x, & \frac{1}{\mathrm{e}^2}<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1), & 0<y\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^2},\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right), & \frac{1}{\mathrm{e}^2}<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因此 $Y=\frac{1}{2}$ 时，

$$f_{X|Y}(x\,|\,0.5)=\frac{f(x,0.5)}{f_Y(0.5)}=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$P\left\{X<\frac{3}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{2}\right\}=\int_1^{1.5}1\mathrm{d}x=0.5\,.$$

例 3.2.12　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当观测到 $X=x\,(0<x<1)$ 时，Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值．试求：（1）(X,Y) 的概率密度函数；（2）Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$．

解　（1）当 $X=x$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）如图 3.7 所示，Y 的概率密度函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{3x^2}{1-x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}y^2-3y-3\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

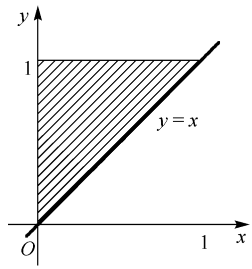


图 3.7　示意图

例 3.2.13　设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：（1）常数 k 的值；（2）$Z=2X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解

（1）如图 3.8 所示，根据密度函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^{2x}k\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 k2x\mathrm{d}x=k\ ,$$

故 $k=1$；

（2）如图 3.9 所示，$Z=2X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}1, & z\geqslant 4,\\ \displaystyle\int_0^{\frac{z}{4}}\left[\int_0^{2x}1\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{\frac{z}{4}}^1\left[\int_0^{z-2x}1\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x, & 2<z<4,\\ \displaystyle\int_0^{\frac{z}{2}}\left[\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{z-y}{2}}1\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y, & 0<z\leqslant 2,\\ 0, & z\leqslant 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & z\geqslant 4,\\ z-1-\dfrac{z^2}{8}, & 2<z<4,\\ \dfrac{z^2}{8}, & 0<z\leqslant 2,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

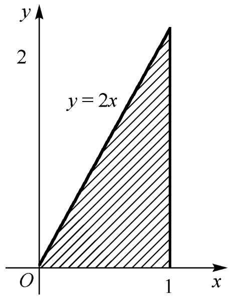


图 3.8　示意图

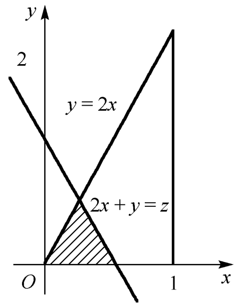


图 3.9　示意图

故

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}\dfrac{z}{4}, & 0<z\leqslant 2,\\ 1-\dfrac{z}{4}, & 2<z<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.2.3　题型三：二维随机变量的证明问题

例 3.2.14　已知独立随机变量 X,Y 分别服从 λ_1,λ_2 为参数的泊松分布，试证明 $Z=X+Y$ 也服从泊松分布.

证　由概率的运算法则可知，对于任一非负整数 m，有

$$P\{Z=m\}=\sum_{k=0}^{m}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^{\ k}}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{\ m-k}}{(m-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\lambda_1^{\ k}\lambda_2^{\ m-k}=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}(\lambda_1+\lambda_2)^m$$

故

$$Z\sim P\{Z=m\}=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}(\lambda_1+\lambda_2)^m,\quad m=0,1,2,\cdots,$$

即 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

例 3.2.15　已知 X,Y 为非负的连续型随机变量，且它们相互独立，则有

$$P\{X<Y\}=\int_0^{+\infty}F_X(y)f_Y(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $F_X(x)$ 为 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 为 Y 的概率密度函数.

证　由 X,Y 相互独立，有（X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

因此

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{y}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}f_Y(y)\mathrm{d}y\int_0^{y}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f_Y(y)F_X(y)\mathrm{d}y.$$

例 3.2.16　设随机变量 X 与 Y 的概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则对任意的 a（$|a|<1$），有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]$$

是 (X,Y) 的联合概率密度，且边缘概率密度为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$．

解　由于 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 非负，$0\leqslant F_X(x)\leqslant 1$，$0\leqslant F_Y(y)\leqslant 1$，因此

$$-1\leqslant[2F_X(x)-1][2F_Y(y)-1]\leqslant 1,$$

所以对任意的 a（$|a|<1$），有

$$1+a[2F_X(x)-1][2F_Y(y)-1]\geqslant 0,$$

故 $f(x,y)$ 非负；又因为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y)[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]\mathrm{d}F_X(x)\right]\mathrm{d}F_Y(y)\\
&=\int_0^1\left[\int_0^1[1+a(2u-1)(2v-1)]\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v\qquad（记\ u=F_X(x)、v=F_Y(y)）\\
&=\int_0^1\mathrm{d}v=1
\end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 是 (X,Y) 的联合概率密度；

X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y)[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]\mathrm{d}y\\
&=f_X(x)\int_{-\infty}^{+\infty}[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]\mathrm{d}F_Y(y)\\
&=f_X(x)\int_0^1[1+a(2F_X(x)-1)(2v-1)]\mathrm{d}v\qquad 记\ v=F_Y(y)\\
&=f_X(x)
\end{aligned}$$

Y 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y)[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]\mathrm{d}x\\
&=f_Y(y)\int_{-\infty}^{+\infty}[1+a(2F_X(x)-1)(2F_Y(y)-1)]\mathrm{d}F_X(x)\\
&=f_Y(y)\int_0^1[1+a(2F_Y(y)-1)(2u-1)]\mathrm{d}u\qquad（记\ u=F_X(x)）\\
&=f_Y(y)
\end{aligned}$$

故 (X,Y) 的关于 X 和 Y 的边缘概率密度为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$．

3.3　深 化 训 练

3.3.1　填空题

（1）已知 X,Y 为两个随机变量，且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X<0\}=P\{Y<0\}=\dfrac{4}{7}$，则 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=$________.

（2）设 (X,Y) 的分布律为如表 3.9 所示.

且 $P\{Y=1\mid X=-1\}=\dfrac{1}{2}$．则 $a=$________，$b=$________.

（3）设 (X,Y) 的分布律如表 3.10 所示.

表 3.9　分布律

Y \ X	−1	1
−1	0.3	b
1	a	0.2

表 3.10　分布律

Y \ X	0	1
0	0.4	B
1	A	0.1

且 $\{X=1\}$与$\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 $A=$________，$B=$________.

（4）设相互独立的随机变量 X,Y 具有同一分布律$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，则随机变量 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布律为________.

（5）设 X 与 Y 为相互独立的两个随机变量，且它们的分布律均为 $b(1,p)$，令 $Z=\begin{cases}1, & X+Y\text{为偶数},\\ 0, & X+Y\text{为奇数}.\end{cases}$ 当 $p=$________时，X 与 Z 相互独立.

（6）$F(x,y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，则

$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=$________；　$P\{X\leqslant x_2,Y\leqslant y_2\}=$________；

$P\{X<x_2,Y<y_2\}=$________；　$P\{x_1<X,y_1<Y\}=$________.

（7）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0)$，则 $P\left\{\dfrac{X}{Y}<0\right\}=$________.

（8）【2006（1，3）】设随机变量 X与Y 相互独立，且均服从区间 $[0.3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$________.

（9）【2015（1，3）】二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

3.3.2　单项选择题

（1）二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律如表 3.11 所示.

表 3.11　分布律

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	a	b

若 X、Y 相互独立，则 a、b 的值为（　　）.

（A）$a=\frac{2}{9},b=\frac{1}{9}$　　（B）$a=\frac{1}{9},b=\frac{2}{9}$

（C）$a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{6}$　　（D）$a=\frac{5}{18},b=\frac{1}{18}$

（2）【2005（1，3）】设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布如表 3.12 所示.

表 3.12　概率分布

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则下列选项正确的是（　　）.

（A）$a=0.2,b=0.3$　　（B）$a=0.4,b=0.1$

（C）$a=0.3,b=0.2$　　（D）$a=0.1,b=0.4$

（3）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N\left(1,2;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，且 $P\{aX+bY\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$，则 a,b 的值为（　　）.

（A）$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{4}$　　（B）$a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{2}$

（C）$a=-\frac{1}{4},b=-\frac{1}{2}$　　（D）$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$

（4）设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,2)$ 和 $N(-1,1)$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$　　（B）$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

（C）$P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$　　（D）$P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

（5）【2012（1）】设随机变量 X与Y 相互独立，且分别服从参数为 $\lambda=1$ 和参数为 $\lambda=4$ 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$（　　）.

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{4}{5}$

（6）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布律分别为

X	0	2
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	2
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

则下列式子正确的是（　　）.

（A）$X=Y$　　（B）$P\{X=Y\}=1$

（C）$P\{X=Y\}=\frac{5}{8}$　　（D）$P\{X=Y\}=\frac{1}{16}$

（7）设随机变量 X 与 Y 的分布律分别为

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $P\{XY\neq 0\}=0$，则 $P\{X\geqslant Y\}=$（　　）.

（A）0　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{3}{4}$

（8）设 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，设 a、b 任意常数，则 $Z = aX + bY$ 服从（　　）.

（A）$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$　　（B）$N(\mu_1+\mu_2,a\sigma_1^2+b\sigma_2^2)$

（C）$N(a\mu_1+b\mu_2,a\sigma_1^2+b\sigma_2^2)$　　（D）$N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

（9）设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X-Y\leqslant 1\}$（　　）.

（A）随 μ 的增加而增加　　（B）随 μ 的增加而减少

（C）随 σ 的增加而增加　　（D）随 σ 的增加而减少

（10）设相互独立的随机变量 X_1 与 X_2，分布函数分别为 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为连续函数，则下列选项中正确的是（　　）.

（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为概率密度　　（B）$f_2(x)f_1(x)$ 必为概率密度

（C）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为分布函数　　（D）$F_1(x)F_2(x)$ 必为分布函数

（11）【2008（1，3）】设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为（　　）.

（A）$F^2(z)$　　（B）$F(x)F(y)$

（C）$1-[1-F(x)]^2$　　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$

（12）【2007（1，3）】设 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X与Y 不相关，$f_X(x)$ 与 $f_Y(x)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ 为（　　）.

（A）$f_X(x)$　　（B）$f_Y(x)$　　（C）$f_X(x)\ f_Y(x)$　　（D）$\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

（13）【2013（3）】设随机变量 X与Y 相互独立，且 X与Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{12}$　　（B）$\dfrac{1}{8}$　　（C）$\dfrac{1}{6}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

（14）【2012（3）】设随机变量 X与Y 相互独立，且均服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\pi}{8}$　　（D）$\dfrac{\pi}{4}$

（15）【2009（1，3）】设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则 $F_Z(z)$ 的间断点个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3.3.3　随机变量 (X,Y) 等可能地取 $(-1,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$.

试求：（1）(X,Y) 的分布律；（2）X 和 Y 的边缘分布列；（3）$X=0$ 时 Y 的分布列，$Y=1$ 时 X 的分布列；（4）$P\{X+Y\geqslant 0\}$；（5）判断 X 与 Y 是否相互独立；（6）$\min\{X,Y\}$ 的分布列.

3.3.4　随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，设随机变量 $X_k=\begin{cases}0, & x\geqslant k,\\ 1, & x<k,\end{cases}$ $k=1,2$．试求：（1）(X_1,X_2) 的分布律及边缘分布律；（2）$P\{X_1+X_2>1\mid X_1=1\}$．

3.3.5　设 (X,Y) 的分布律如表 3.13 所示，且 $P\{X+Y=2\}=0.357$．试求：

（1）参数 a 和 b 的值；（2）$X=1$ 时，Y 的条件分布律；（3）判断 X 与 Y 是否相互独立．

表 3.13　分布律

Y \ X	0	1	2
0	a	0.374	0.268
1	0.176	b	0.057

3.3.6　设随机变量 $X\sim b(1,0.6)$，$X=0$ 时 Y 的条件分布列为 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\end{pmatrix}$，$X=1$ 时 Y 的条件分布列为 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.5 & 0.4\end{pmatrix}$．试求：

（1）(X,Y) 的分布律；　　（2）X 与 Y 至少有一个小于 1 的概率．

3.3.7　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的分布律分别为

X	-3	-1
p	0.75	0.25

Y	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

试求：（1）(X,Y) 的分布律；（2）$Z=|2X+Y|$ 的分布律；（3）$P\{X+Y>0\mid Y\geqslant 2\}$．

3.3.8　设随机变量 X 和 Y 相互独立，表 3.14 列出了二维随机变量 (X,Y) 的分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表 3.14 中的空白处．

表 3.14　分布律

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=P_i$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$			1

3.3.9　设二维随机变量 (X,Y) 的分布律如表 3.15 所示．

表 3.15　分布律

Y \ X	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a，b，c 为常数，且 $E(X)=0.2$，$P\{Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0\}=0.8$，记 $Z=X+Y$．试求：

（1）常数 a，b，c 的值；（2）Z 的概率分布；（3）$P\{X=Z\}$．

3.3.10　设随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\mid -1<x<1, 0<y<1\}$ 上的均匀分布，令

$$U=\begin{cases}0, & X<0,\\ 1, & 0\leqslant X<Y,\\ 2, & X\geqslant Y.\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & 2X\geqslant Y,\\ 1, & 2X<Y.\end{cases}$$

试求：（1）(U,V) 的分布律及 U 的边缘分布律；（2）$V=1$ 时 U 的条件分布律.

3.3.11　设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且 $P\{X_i=0\}=0.4$，$P\{X_i=1\}=0.6,\ i=1,2,3,4$，求 $Y=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$ 的分布律.

3.3.12　设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p\ (0<p<1)$，且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数．求：

（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

（2）二维随机变量 (X,Y) 的分布律.

3.3.13　设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & m\leqslant n,\\ 0, & m>n,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0, 0<p<1, n,m=0,1,2,\cdots$，求 X 、Y 的边缘分布律及条件分布律.

3.3.14　已知独立随机变量 X 和 Y 分别服从 $b(n_1,p)$ 和 $b(n_2,p)$，试求 $Z=X+Y$ 的分布律.

3.3.15　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：（1）常数 c 的值；（2）$P\{X>Y\}$；（3）边缘概率密度；（4）条件概率密度；（5）判断 X 与 Y 是否相互独立.

3.3.16　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}kx, & 0<x<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）常数 k 的值；（2）$P\{X+Y>2\}$；（3）$P\left\{Y>1\,\middle|\,X<\dfrac{1}{2}\right\}$.

3.3.17　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0<x<1, 0<y<2(1-x),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）常数 c；（2）条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x),\ f_{X|Y}(x\,|\,y)$.

3.3.18　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）$P\{Y<2\,|\,X=1\},\ P\{X>1\,|\,Y=4\}$；（2）判断 X 与 Y 是否相互独立.

3.3.19　设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观测到 $X=x\ (0<x<1)$ 时，Y 在区间

$(x,1)$ 上随机取值．试求：（1）Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；（2）$Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_z(z)$．

3.3.20　设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{12}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & 0<x,\ 0<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）常数 k；（2）(X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)$；（3）边缘分布函数 $F_X(x)$，$F_Y(y)$．

3.3.21　设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim U(0,1)$，Y 服从参数为 1 的指数分布.

求：（1）$P\{X>Y\}$；（2）$Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_z(z)$．

3.3.22　设二维随机变量 (X,Y) 在 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<2\}$ 服从均匀分布.

求：（1）$U=XY$ 的概率密度函数 $f_U(u)$；（2）$V=\min\{X,Y\}$ 的概率密度函数 $f_V(v)$．

3.3.23　设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim b(1,0.4)$，$Y\sim N(0,1)$．求：

（1）$P\{X-Y\leqslant 1\}$；（2）$P\{XY\leqslant 1\}$．

3.3.24　设两元件 A 和 B 的寿命 X 与 Y 相互独立，且 X 服从参数为 $\theta=\dfrac{1}{3}$ 的指数分布，Y 服从参数为 $\theta=\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，问哪个元件寿命长的可能性大？

3.3.25　设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，$Y$ 为连续型随机变量，且其概率密度函数为 $f_Y(y)$，分布函数为 $F_Y(y)$．求：（1）$Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$；（2）$U=\min\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_U(u)$．

3.3.26　某系统 Q 由两个子系统 q1 和 q2 联接组成，联接的方式有三种：（1）q1、q2 串联；（2）q1、q2 并联；（3）q1 与 q2 一个工作一个备用．已知子系统 q1 和 q2 的工作状况相互独立，它们的使用寿命 X,Y 分别服从参数为 $a,b\ (a\neq b)$ 指数分布．设系统 Q 的使用寿命为 Z，分别求三种情况下 Z 的概率密度.

3.4　深化训练详解

3.3.1　填空题

（1）$\dfrac{3}{7}$；**提示**

$$P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}.$$

（2）0.3，0.2；**提示**　由分布律的性质有

$$0.3+a+b+0.2=1,$$

且

$$P\{Y=1\,|\,X=-1\}=\frac{a}{0.3+a},$$

故 $\dfrac{a}{0.3+a}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=0.3$，$b=0.2$．

（3）0.4，0.1；**提示**　由分布律的性质有

$$0.4+A+B+0.1=1,$$

由 $\{X=1\}$与$\{X+Y=1\}$ 相互独立有

$$P\{X=1,X+Y=1\}=P\{X=1\}P\{X+Y=1\},$$

而

$$P\{X=1,X+Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=B,$$

$$P\{X=1\}P\{X+Y=1\}=(0.1+B)(A+B),$$

因此 $A=0.4$，$B=0.1$．

（4）$\begin{array}{c|cc} Z & 0 & 1 \\ \hline p & 0.51 & 0.49 \end{array}$；**提示**　由随机变量 X,Y 相互独立可得 (X,Y) 的分布律，如表 3.16 所示.

表 3.16　分布律

Y \ X	0	1
0	0.09	0.21
1	0.21	0.49

故 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布律为

$$\begin{array}{c|cc} Z & 0 & 1 \\ \hline p & 0.51 & 0.49 \end{array}$$

（5）$\dfrac{1}{2}$；**提示**　由于 (X,Y) 的分布律如表 3.17 所示.

表 3.17　分布律

Z \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$p(1-p)$	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
1	$(1-p)^2$	p^2	$p^2+(1-p)^2$
$p_{i\cdot}$	$1-p$	p	

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，X 与 Z 为相互独立.

（6）$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$；$F(x_2,y_2)$；$F(x_2-0,y_2-0)$；

$$F(+\infty,+\infty)-F(+\infty,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,+\infty).$$

提示　由分布函数的定义有

$$\begin{aligned}P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)&=P(X\leqslant x_2,Y\leqslant y_2)+P(X\leqslant x_1,Y\leqslant y_1)\\&\quad-P(X\leqslant x_2,Y\leqslant y_1)-P(X\leqslant x_1,Y\leqslant y_2)\\&=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2);\end{aligned}$$

$$P\{x_1<X,y_1<Y\}=F(+\infty,+\infty)-F(+\infty,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,+\infty).$$

（7）$\dfrac{1}{2}$；**提示**　由已知，X 与 Y 相互独立，且 X 与 Y 均服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{X}{Y}<0\right\}&=P\{X<0,Y>0\}+P\{X>0,Y<0\}\\&=P\{X<0\}P\{Y>0\}+P\{X>0\}P\{Y<0\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

（8）$\frac{1}{9}$；由于 X,Y 相互独立且同分布，故

$$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}=[P\{X\leqslant 1\}]^2 .$$

而

$$P\{X\leqslant 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

故

$$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9} .$$

（9）$\frac{1}{2}$；**提示**　由 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$，可知 X 与 Y 不相关，从而相互独立，且 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，因此

$$\begin{aligned}P\{XY-Y<0\}&=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\}\\&=P\{X<1\}P\{Y>0\}+P\{X>1\}P\{Y<0\}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3.3.2　单项选择题

（1）A；**提示**　(X,Y) 的分布律如表 3.18 所示.

表 3.18　分布律

$Y \backslash X$	1	2	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{9}$	a	$\frac{1}{9}+a$
3	$\frac{1}{18}$	b	$\frac{1}{18}+b$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+a+b$	

容易判断选项 A 正确.

（2）B；**提示**　由于

$$P\{X=0\}=0.4+a，\quad P\{X+Y=1\}=a+b，$$

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a，$$

而事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，意味着

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}，$$

因此 $a=(0.4+a)(a+b)$，根据概率分布的性质有 $0.4+a+b+0.1=1$，所以 $a=0.4,b=0.1$.

（3）D；**提示**　由 $(X,Y)\sim N\left(1,2;1,4;-\frac{1}{2}\right)$ 可知，

$$X\sim N(1,1),\ Y\sim N(2,4)，\quad aX+bY\sim N(a+2b,\sigma^2)，$$

其中

$$\sigma^2 = D(aX+bY) = a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\times\sqrt{4},$$

因此

$$P\{aX+bY\leqslant 1\} = \Phi\left[\frac{1-(a+2b)}{\sigma}\right] = \frac{1}{2},$$

所以 $a+2b=1$，故选项 D 正确.

（4）D；**提示**　由 X 与 Y 相互独立且服从正态分布有

$$X+Y\sim N(-1,3),\quad X-Y\sim N(1,3),$$

因此 $P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$. 所以选项 D 正确.

（5）A；**提示**　由已知 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & 0\leqslant y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 X 与 Y 相互独立可知，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-x-4y}, & 0\leqslant x, 0\leqslant y\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^y 4\mathrm{e}^{-x-4y}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.$$

（6）C；**提示**

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{5}{8},\end{aligned}$$

故选项 C 正确.

（7）B；**提示**　$P\{XY\neq 0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=0$，因此 (X,Y) 的分布律如表 3.19 所示.

表 3.19　分布律

Y \ X	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

所以

$$P\{X\geqslant Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4},$$

故选项 B 正确.

（8）D；

（9）D；**提示**　由 X 与 Y 相互独立且服从正态分布有 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，因此

$$P\{X-Y\leqslant 1\}=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

而 $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ 随 σ 的增加而减少，所以选项 D 正确.

（10）D；**提示**　由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=2\neq 1,$$

故选项 A 不正确；由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x\neq 1$，故选项 B 不正确；由于

$$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=1+1=2\neq 1,$$

故选项 C 不正确；而 $F_1(x)F_2(x)$ 满足分布函数的所有性质，故选项 D 正确.

（11）A；**提示**　Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F^2(z).\end{aligned}$$

（12）A；**提示**　由于 (X,Y) 服从二维正态分布，X 与 Y 不相关，因此 X 与 Y 相互独立，所以条件概率密度等于边缘概率密度.

（13）C；**提示**　由于

$$\begin{aligned}P\{X+Y=2\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}\\&=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

（14）D；**提示**　由已知 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 X 与 Y 相互独立，有 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

如图 3.10 所示. 因此

$$P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

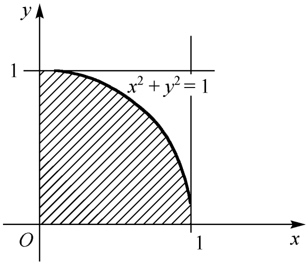


图 3.10　示意图

（15）B；提示

$$F_Z(z)=P\{XY\leqslant z\}=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant z\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{0\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z\}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z<0,\\ \dfrac{1}{2}[1+\Phi(z)], & z\geqslant 0.\end{cases}$$

因此 $F_Z(z)$ 只有一个间断点.

3.3.3 （1）(X,Y) 的分布律如表 3.20 所示.

表 3.20　分布律

Y \ X	−1	0
0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（2）X 的边缘分布列为

X	-1	0
$p_{i\cdot}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y 的边缘分布列为

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

（3）$X=0$ 时 Y 的分布列为 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$Y=1$ 时 X 的分布列 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（4）$P\{X+Y\geqslant 0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{2}{3}$.

（5）由于

$$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\},$$

故 X 与 Y 不相互独立.

（6）$\min\{X,Y\}$ 的分布列为

$\min\{X,Y\}$	-1	0
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

3.3.4 （1）随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{X\geqslant 1,X\geqslant 2\}=P\{X\geqslant 2\}=\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0.135,$$

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X<1,X<2\}=P\{X<1\}=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0.632,$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X\geqslant 1,X<2\}=P\{1\leqslant X<2\}=\int_1^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0.233,$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X<1,X\geqslant 2\}=0.$$

故 (X_1,X_2) 的分布律及边缘分布律如表 3.21 所示.

表 3.21　分布律及边缘分布律

X_2 \ X_1	0	1	
0	0.135	0	0.135
1	0.233	0.632	0.865
	0.368	0.632	

（2）$P\{X_1+X_2>1\mid X_1=1\}=\dfrac{P\{X+X_2>1,X_1=1\}}{P\{X=1\}}$

$$=\frac{P\{X_1=1,X_2=1\}}{P\{X_1=1\}}=\frac{0.632}{0.632}=1$$

3.3.5　（1）由分布律的性质有

$$a+0.176+0.374+b+0.268+0.057=1，$$

即

$$a+b=0.125，$$

由 $P\{X+Y=2\}=0.357$，有 $b+0.268=0.357$，故 $b=0.089$，$a=0.036$；

（2）$X=1$时，Y的条件分布律为$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.808 & 0.192\end{pmatrix}$；

（3）$P\{X=0,Y=1\}\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}$，故 X 与 Y 不相互独立.

3.3.6　随机变量的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$，故 (X,Y) 的分布律如表 3.22 所示.

（2）$P(\{X<1\}\cup\{Y<1\})=P\{X<1\}+P\{Y<1\}-P\{X<1,Y<1\}$

$$=P\{X=0\}+P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}$$

$$=0.4+0.18-0.12=0.46\ .$$

3.3.7　（1）(X,Y) 的分布律如表 3.23 所示.

表 3.22　分布律

Y \ X	0	1
−1	0.12	0.06
1	0.08	0.3
2	0.2	0.24

表 3.23　分布律

Y \ X	−3	−1
1	0.3	0.1
2	0.15	0.05
3	0.3	0.1

（2）$Z=|2X+Y|$的分布律为

Z	0	1	3	4	5
p	0.05	0.2	0.3	0.15	0.3

（3）$P\{X+Y>0\mid Y\geqslant 2\}=\dfrac{P\{X+Y>0,Y\geqslant 2\}}{P\{Y\geqslant 2\}}$

$$=\frac{P\{X=-1,Y=2\}+P\{X=-1,Y=3\}}{P\{Y=2\}+P\{Y=3\}}$$

$$=\frac{0.05+0.1}{0.2+0.4}=0.25.$$

3.3.8　因为

$$P\{Y=y_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_2,Y=y_1\},$$

从而

$$P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}.$$

而 X 与 Y 独立，故

$$P\{X=x_1\}\times\frac{1}{6}=P\{X=x_1,Y=y_1\}=\frac{1}{24}.$$

解得

$$P\{X=x_1\}=\frac{1}{24}\times 6=\frac{1}{4}\ .$$

又因为

$$P\{X=x_1\}=P\{X=x_1,Y=y_1\}+P\{X=x_1,Y=y_2\}+P\{X=x_1,Y=y_3\},$$

即

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+P\{X=x_{1,}Y=y_3\},$$

从而

$$P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{12}.$$

类似方法可以得到

$$P\{Y=y_2\}=\frac{1}{2},\qquad P\{X=x_2,Y=y_2\}=\frac{3}{8}\,,\qquad P\{Y=y_3\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\,,$$

$$P\{X=x_2\}=\frac{3}{4}\,,\qquad P\{X=x_2,Y=y_3\}=\frac{1}{4}\ .$$

故 (X,Y) 的分布律如表 3.24 所示.

表 3.24　分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=P_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

3.3.9　(1) 由概率分布的性质知

$$a+0.1+0+0+b+0.1+0.2+0.2+c=1\,,$$

即

$$a+b+c=0.4\,,$$

由 $E(X)=0.2$，可得

$$-a+c=-0.1.$$

再由

$$P\{Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0\}=\frac{P\{Y\leqslant 0,\ X\leqslant 0\}}{P\{X\leqslant 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.2}=0.8$$

得 $a+b=0.3$.解以上关于 a 、 b 、 c 的三个方程得 $a=0.2, b=0.1, c=0.1$.

（2） Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

（3） $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0.1+b+0.2=0.1+0.1+0.2=0.4$.

3.3.10 （1） (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X<0,2X\geqslant Y\}=0\text{，}$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X<0,2X<Y\}=\frac{1}{2}\text{，}$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{0\leqslant X<Y,2X\geqslant Y\}=\frac{1}{8}\text{，}$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{0\leqslant X<Y,2X<Y\}=\frac{1}{8}\text{，}$$

$$P\{U=2,V=0\}=P\{X\geqslant Y,2X\geqslant Y\}=\frac{1}{4}\text{，}$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{X>Y,2X<Y\}=0.$$

因此 (U,V) 分布律及 U 的边缘分布律如表 3.25 所示.

表 3.25　分布律及边缘分布律

V \ U	0	1	2	$p_{.j}$
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{8}$
$p_{i.}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

（2） $V=1$ 时，U 的条件分布律为

$U=k$	0	1	2
$P\{U=k\mid V=1\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

3.3.11　由于

$$Y=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}=X_1X_4-X_2X_3,$$

而当$i\neq j$，$i,j=1,2,3,4$时，

$$\begin{aligned}P\{X_iX_j=0\}&=1-P\{X_iX_j\neq 0\}=1-P\{X_i=1,X_j=1\}\\&=1-P\{X_i=1\}P\{X_j=1\}=1-0.6\times 0.6=0.64,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X_iX_j=1\}&=P\{X_i=1,X_j=1\}\\&=P\{X_i=1\}P\{X_j=1\}=0.6\times 0.6=0.36,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}P\{Y=-1\}&=P\{X_1X_4-X_2X_3=-1\}=P\{X_1X_4=0,X_2X_3=1\}\\&=P\{X_1X_4=0\}P\{X_2X_3=1\}=0.64\times 0.36=0.2304,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=0\}&=P\{X_1X_4-X_2X_3=0\}\\&=P\{X_1X_4=0,X_2X_3=0\}+P\{X_1X_4=1,X_2X_3=1\}\\&=P\{X_1X_4=0\}P\{X_2X_3=0\}+P\{X_1X_4=1\}P\{X_2X_3=1\}\\&=0.64\times 0.64+0.36\times 0.36=0.5392,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=1\}&=P\{X_1X_4-X_2X_3=1\}=P\{X_1X_4=1,X_2X_3=0\}\\&=P\{X_1X_4=1\}P\{X_2X_3=0\}=0.64\times 0.36=0.2304,\end{aligned}$$

故Y的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.2304	0.5392	0.2304

3.3.12　（1）$P\{Y=m\mid X=n\}=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots$.

（2）利用（1）的结论，有

$$P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

3.3.13　X 的边缘分布律为

$$\begin{aligned}P\{X=m\}&=\sum_{n=m}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\&=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\\&=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda p},\quad m=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即 $X\sim\pi(\lambda p)$；

Y 的边缘分布律为

$$\begin{aligned}P\{Y=n\}&=\sum_{m=0}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\&=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad n=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即 $Y\sim\pi(\lambda)$；

X 的条件分布律为

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda}}{\dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}}, & m\leqslant n,\\ 0, & m>n\end{cases}$$

$$=\begin{cases}=\dfrac{n!p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}, & m\leqslant n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

即 X 的条件分布律为 $b(n,p)$；

Y 的条件分布律为

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda}}{\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda p}}=\dfrac{\lambda^{n-m}(1-p)^{n-m}}{(n-m)!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}, & m\leqslant n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

即 Y 服从参数为 $\lambda(1-p)$ 的泊松分布.

3.3.14　由概率的运算法则知，对于任一非负整数 $m\in\{0,1,2,\cdots,n_1+n_2\}$，有

$$P\{Z=m\}=\sum_{k=0}^{m}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_{n_1}^k p^k(1-p)^{n_1-k}C_{n_2}^{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n_2-(m-k)}$$

$$=p^m(1-p)^{m-k}\sum_{k=0}^{m}C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}=C_{n_1+n_2}^m p^m(1-p)^{m-k},$$

故 $Z\sim b(n_1+n_2,p)$.

3.3.15　（1）如图 3.11 所示，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 cx^2y\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{cx^2}{2}(1-x^4)\mathrm{d}x=\frac{4}{21}c=1,$$

解得 $c=\dfrac{21}{4}$.

（2）如图 3.12 所示，

$$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{21}{4}x^2\cdot\frac{1}{2}(x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{3}{20};$$

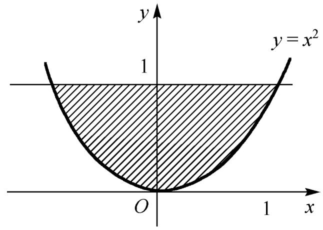


图 3.11　示意图

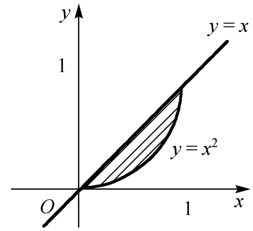


图 3.12　示意图

（3）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y\\0,\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\0, & 其他.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x\\0,\end{cases}=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

（4）当 $-1<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时，

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)}=\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2<y<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

当 $0<y\leqslant 1$ 时，

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y},\\0, & 其他.\end{cases}$$

（5）由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ 不是几乎处处成立，故 X 与 Y 不独立.

3.3.16　（1）如图 3.13 所示，由概率密度函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2kx\mathrm{d}y=\int_0^2kx(2-x)\mathrm{d}x=1,$$

解得 $k=\dfrac{3}{4}$.

（2）如图 3.14 所示

$$P(X+Y>2)=\iint\limits_{x+y>2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{2-y}^{y}\frac{3}{4}x\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{3}{2}(y-1)\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

（3）$P\left\{Y>1\,\middle|\,X<\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{X<\frac{1}{2},Y>1\right\}}{P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}}$

$$=\frac{\displaystyle\iint\limits_{x<\frac{1}{2},\,y>1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint\limits_{x<\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_1^2\frac{3}{4}x\mathrm{d}y}{\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^2\frac{3}{4}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{3/32}{5/32}=\frac{3}{5}.$$

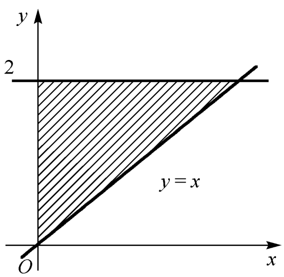


图 3.13　示意图

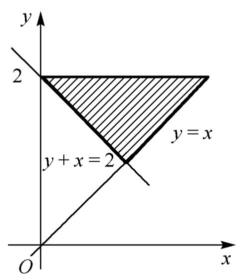


图 3.14　示意图

3.3.17　（1）如图 3.15 所示，由概率密度函数的性质有

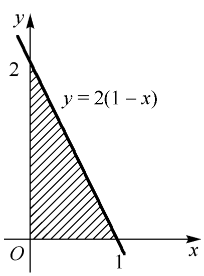


图 3.15　示意图

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}cxy\mathrm{d}y=\int_0^1 cx2(1-x)^2\mathrm{d}x=1,$$

故 $c=6$.

（2）X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}6xy\mathrm{d}y=12x(1-x)^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此当 $0<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{6xy}{12x(1-x)^2}=\dfrac{y}{2(1-x)^2}, & 0<y<2(1-x),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}6xy\mathrm{d}x=3y\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^2, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此当 $0<y<2$ 时，

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{6xy}{3y\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^2}, & 1-\dfrac{y}{2}>x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

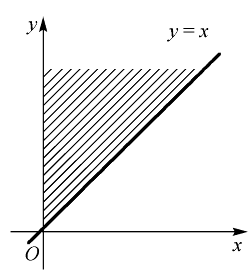


图 3.16　示意图

3.3.18　（1）如图 3.16 所示，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\\0,\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\0, & 其他.\end{cases}$$

因此当 $X=1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|1)=\frac{f(1,y)}{f_X(1)}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{1-y}, & y>1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$P\{Y<2|X=1\}=\int_{y<2|x=1}f_{Y|X}(y|1)\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{e}^{1-y}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\0, & 其他.\end{cases}$$

因此当 $Y=4$ 时，

$$f_{X|Y}(x|4)=\frac{f(x,4)}{f_Y(4)}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{4\mathrm{e}^{-4}}=\dfrac{1}{4}, & 0<x<4,\\0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$P\{X>1|Y=4\}=\int_{x>1|y=4}f_{X|Y}(x|4)\mathrm{d}y=\int_1^4\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

（2）由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ 不是几乎处处成立，故 X 与 Y 不独立.

3.3.19　（1）如图 3.17 所示，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

当 $X=x$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

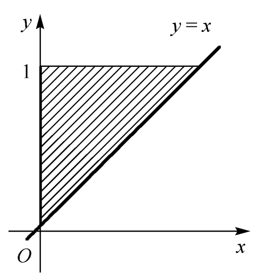


图 3.17　示意图

因此 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

故 Y 的概率密度函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

（2）如图 3.18 所示，根据 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$，

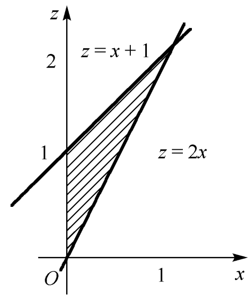


图 3.18　示意图

而

$$f(x,z-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<z-x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{z}{2}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln\left(1-\frac{z}{2}\right), & 0<z<1,\\ \displaystyle\int_{z-1}^{\frac{z}{2}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\ln 2, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.3.20　（1）由分布函数的性质有

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{k}{12}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y})=1,$$

故 $k=12$.

（2）$f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（3）$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

3.3.21　由 X 与 Y 相互独立，可得（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1,0<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

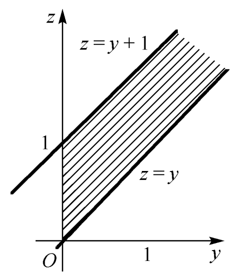


图 3.19　示意图

（1）$P\{X>Y\}=\displaystyle\iint\limits_{x>y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-1}.$

（2）如图 3.19 所示，

$$f(z-y,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<y,0<z-y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$ 可知，

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ \displaystyle\int_{z-1}^z\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{1-z}-\mathrm{e}^{-z}, & 1\leqslant z,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.3.22 （1）(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

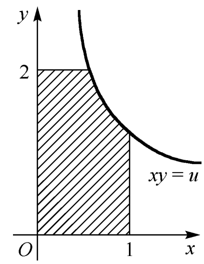


图 3.20　示意图

如图 3.20 所示，$U=XY$ 的分布函数为

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{XY\leqslant u\}=\iint\limits_{xy\leqslant u} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}1, & u\geqslant 2,\\ \displaystyle\int_0^{\frac{u}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{u}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{u}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y, & 0<u<2,\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & u\geqslant 2,\\ \dfrac{u}{2}-\dfrac{u}{2}\ln\dfrac{u}{2}, & 0<u<2,\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}$$

故

$$f_U(u)=\frac{\mathrm{d}F_U(u)}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{u}{2}, & 0<u<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）$V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant v\}=1-P\{\min\{X,Y\}>v\}$$

$$=1-P\{X>v,Y>v\}=1-\iint\limits_{x>v,y>v} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而

$$\iint\limits_{x>v,y>v} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & v\geqslant 1,\\ \displaystyle\int_v^1\mathrm{d}x\int_v^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y=1-\frac{3}{2}v+\frac{v^2}{2}, & 0\leqslant v<1,\\ 1, & v<0.\end{cases}$$

因此

$$F_V(v)=\begin{cases}0, & v<0,\\ \dfrac{3}{2}v-\dfrac{v^2}{2}, & 0\leqslant v<1,\\ 1, & v\geqslant 1.\end{cases}$$

故

$$f_V(v)=\frac{\mathrm{d}F_V(v)}{\mathrm{d}v}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-v, & 0\leqslant v<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.3.23 （1）由题意

$$
\begin{aligned}
P\{X-Y\leqslant 1\} &= P\{X=0\}P\{X-Y\leqslant 1\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{X-Y\leqslant 1\mid X=1\}\\
&= P\{Y\geqslant -1\}P\{X=0\}+P\{Y\geqslant 0\}P\{X=1\}\\
&= 0.6[1-\Phi(-1)]+0.4[1-\Phi(0)]\\
&= 0.6\times 0.841+0.4\times 0.5=0.7046.
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
P\{XY\leqslant 1\} &= P\{X=0\}P\{XY\leqslant 1\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{XY\leqslant 1\mid X=1\}\\
&= P\{-\infty<Y<+\infty\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant 1\}P\{X=1\}\\
&= 0.6\times 1+0.4\Phi(1)=0.6+0.4\times 0.841=0.9364 .
\end{aligned}
$$

3.3.24 　X 与 Y 的概率密度函数分别为

$$
f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

故 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$
f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}6\mathrm{e}^{-3x-2y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

$$
P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{x}(6\mathrm{e}^{-3x-2y})\mathrm{d}y=0.4 ,
$$

因此 B 元件的寿命长的可能性大.

3.3.25 （1）$Z=X+Y$ 的分布函数

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\
&= P\{X+Y\leqslant z, X=-1\}+P\{X+Y\leqslant z, X=1\}\\
&= P\{Y\leqslant z+1, X=-1\}+P\{Y\leqslant z-1, X=1\}\\
&= P\{X=-1\}P\{Y\leqslant z+1\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant z-1\}\\
&= 0.3F_Y(z+1)+0.7F_Y(z-1) .
\end{aligned}
$$

故 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$
f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=0.3f_Y(z+1)+0.7f_Y(z+1) .
$$

（2）$U=\min\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_U(u)=1-(1-F_X(u))(1-F_Y(u))$. 而

$$
F_X(u)=\begin{cases}0, & u<-1,\\ 0.3, & -1\leqslant u<1,\\ 1, & u\geqslant 1.\end{cases}
$$

故

$$
F_U(u)=\begin{cases}F_Y(u), & u<-1,\\ 0.3+0.7F_Y(u), & -1\leqslant u<1,\\ 1, & u\geqslant 1.\end{cases}
$$

3.3.26 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-ax}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}b\mathrm{e}^{-by}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

（1）q1、q2 串联，此时 $Z=\min\{X,Y\}$，因此 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\ .$$

而

$$F_X(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-az}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases},\quad F_Y(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-bz}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

故

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(a+b)z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

所以概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}(a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

（2）q1、q2 并联，此时 $Z=\max\{X,Y\}$，故 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-az})(1-\mathrm{e}^{-bz}), & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

所以概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-az}+b\mathrm{e}^{-bz}-(a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

（3）q1 与 q2 一个工作一个备用，此时 $Z=X+Y$，因此

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y\ .$$

而

$$f(z-y,y)=f_X(z-y)f_Y(y)=\begin{cases}ab\mathrm{e}^{-a(z-y)-by}, & 0<z-y,0<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z ab\mathrm{e}^{-a(z-y)-by}\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{ab}{a-b}(\mathrm{e}^{-bz}-\mathrm{e}^{-az}), & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

3.5　综合提高训练

例 3.5.1　【2010（1，3）】二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x,y<+\infty,$$

求常数 A 及条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

解　由概率密度的性质，

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y,$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y\underline{\underline{t=y-x}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi},$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=A\pi,$$

所以 $A=\dfrac{1}{\pi}$；

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2},$$

当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2},-\infty<y<+\infty.$$

例 3.5.2　【2009（3）】设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（1）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；（2）条件概率 $P\{X\leqslant 1|Y\leqslant 1\}$.

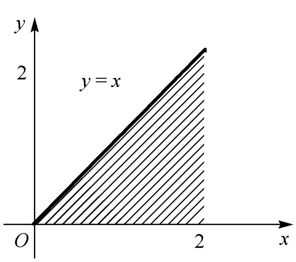


图 3.21　示意图

解　（1）如图 3.21 所示，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

因此当 $x>0$ 时，

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{xe^{-x}}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）如图 3.22，3.23 所示，

$$P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x\leqslant 1,y\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{-x}\mathrm{d}y=1-2e^{-1},$$

$$P\{Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{y\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1-e^{-1},$$

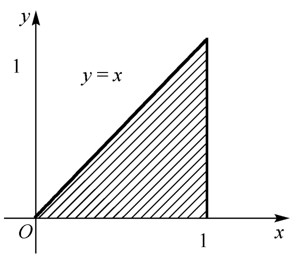


图 3.22　示意图

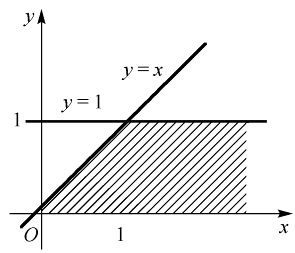


图 3.23　示意图

故

$$P\{X\leqslant 1\,|\,Y\leqslant 1\}=\frac{P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}}{P\{Y\leqslant 1\}}=\frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{e-2}{e-1}.$$

例 3.5.3　【2008（1，3）】设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为

$$P\{X=i\}=\frac{1}{3},\ i=-1,0,1,$$

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$．试求：

（1）$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$；（2）$Z$ 的概率密度 $f_Z(z)$．

解　（1）$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}=\dfrac{P\left\{X=0,Z\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\left\{X=0,Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}$

$$=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2};$$

（2）Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$$
$$=P\{X=-1,X+Y\leqslant z\}+P\{X=0,X+Y\leqslant z\}+P\{X=1,X+Y\leqslant z\}$$

$$=P\{X=-1,Y\leqslant z+1\}+P\{X=0,Y\leqslant z\}+P\{X=1,Y\leqslant z-1\}$$

$$=P\{X=-1\}P\{Y\leqslant z+1\}+P\{X=0\}P\{Y\leqslant z\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant z-1\}$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\}]$$

$$=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)]$$

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1\leqslant z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.5.4　【2007（1，3）】二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求 $P\{X>2Y\}$；（2）$Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解

（1）如图 3.24 所示，

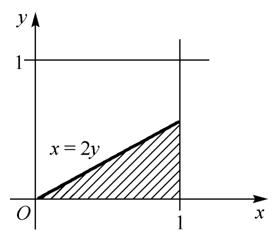


图 3.24　示意图

$$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{7}{24};$$

（2）由题意

$$f(z-y,y)=\begin{cases}2-(z-y)-y=2-z, & 0<y<1,0<z-y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$，有

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^z(2-z)\mathrm{d}y, & 0<z\leqslant 1,\\ \int_{z-1}^1(2-z)\mathrm{d}y, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\leqslant 1,\\ z^2-4z+4, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.5.5　【2005（1，3）】设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：

（1）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

（2）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解　（1）如图 3.25 所示，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

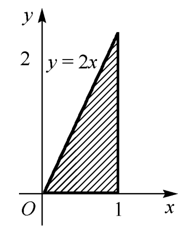


图 3.25　示意图

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{，}$$

当 $z\leqslant 0$ 时， $F_Z(z)=0,\ f_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{2x}\mathrm{d}y+\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{2x-z}^{2x}\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4}\text{，}$$

从而 $f_Z(z)=1-\dfrac{z}{2}$；

当 $z\geqslant 2$ 时， $F_Z(z)=1,\ f_Z(z)=0$. 故

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.5.6　【2013（3）】设二维随机变量 (X,Y)， X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在给定 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；（2）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（3）求 $P\{X>2Y\}$.

解

（1）如图 3.26 所示，

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）如图 3.27 所示，

$$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.$$

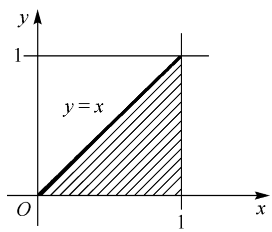


图 3.26　示意图

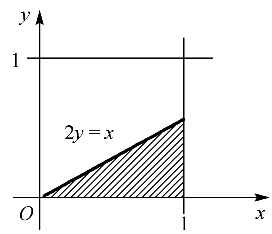


图 3.27　示意图

例 3.5.7　【2011（3）】设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2, y=0$ 所围成的三角形区域．试求：

（1） X 的概率密度 $f_X(x)$；（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$．

解　（1）由已知，有 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ \int_0^{2-x}\mathrm{d}y, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2） Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{2-y}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.5.8　【2009（1，3）】设袋中有 1 个白红色球，2 个黑色球与 3 个白色球，现有放回地从袋中取球两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数．试求：（1）$P\{X=1|Z=0\}$；（2）(X,Y) 的概率分布．

解　（1）依题意，事件 $\{Z=0\}$ 表示“两次取球都没有取到白球”，包含的点数为 $C_3^1C_3^1$，事件 $\{X=1,Z=0\}$ 表示“两次取到的球中一个是红球，另一个是黑球”，包含的点数为 $C_2^1C_2^1$，从而有

$$P\{X=1|Y=0\}=\frac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\frac{2\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}}{\left(\frac{3}{6}\right)^2}=\frac{4}{9};$$

（2）X ,Y 的可能取值均为 $0,1,2$，并且

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{4},\quad P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{36},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{9},\quad P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=1,Y=2\}=P\{X=2,Y=2\}=0.$$

因此 (X,Y) 的概率分布如表 3.26 所示．

表 3.26　示意图

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

第 4 章　随机变量的数字特征

4.1　知 识 要 点

4.1.1　随机变量的数学期望

（1）离散型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$ 绝对收敛，则 X 的**数学期望**为

$$E(X)=\sum_i x_i p_i\text{；}$$

若 $\sum\limits_i g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 $Y=g(X)$ 的**数学期望**为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p_i .$$

设随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，$i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的**数学期望**为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij} .$$

特别地，X 和 Y 的数学期望分别为

$$E(X)=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}\text{，}\quad E(Y)=\sum_i\sum_j y_j p_{ij} .$$

（2）连续型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 X 的**数学期望**为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\text{；}$$

若 $g(x)$ 为连续函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $Y=g(X)$ 的**数学期望**为

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x .$$

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，其中 $g(x,y)$ 为连续函数，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的**数学期望**为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地，X 和 Y 的数学期望分别为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（3）数学期望的性质

① $E(C)=C, C$ 为任意常数；

② $E(kX)=kE(X), k$ 为常数；

③ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

一般地，

$$E(k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n)=k_1E(X_1)+k_2E(X_2)+\cdots+k_nE(X_n)$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数；

④ 若随机变量 X 与 Y 相互独立，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$；

一般地，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则有

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n).$$

4.1.2　随机变量的方差

（1）方差的定义

对于随机变量 X，若 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则 X 的**方差**为

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

（2）方差的性质

① $D(C)=0$, C 为任意常数；

② $D(kX+b)=k^2D(X)$，其中 k,b 为常数；

③ 若随机变量 X 与 Y 相互独立，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；

一般地，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则有

$$D(k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n)=k_1^2D(X_1)+k_2^2D(X_2)+\cdots+k_n^2D(X_n),$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数；

④ $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

4.1.3　协方差

（1）协方差的定义

对于随机变量 X 与 Y，若 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则 X 与 Y 的**协方差**为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y).$$

（2）协方差的性质

① $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$；

② $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；

③ $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$，其中 a,b 为任意常数；

④ $\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$.

4.1.4　相关系数

（1）相关系数的定义

设随机变量 X 与 Y 的方差均存在，则 X 与 Y 的**相关系数**为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

若 $|\rho_{XY}|=1$，称 X 与 Y **完全相关**；若 $\rho_{XY}=0$，称 X 与 Y **不相关**.

（2）相关系数的性质

① $|\rho_{XY}|\leqslant 1$；

② $\rho_{XY}=1\Leftrightarrow$ 存在常数 $a>0,b,$ 使得 $P\{Y=aX+b\}=1$；

$\rho_{XY}=-1\Leftrightarrow$ 存在常数 $a<0,b,$ 使得 $P\{Y=aX+b\}=1$.

4.1.5　随机变量的矩

（1）设有随机变量 X，对正整数 k，若 $E(X^k)$ 存在，称 $E(X^k)$ 为随机变量 X 的 k **阶原点矩**，显然，数学期望为 1 阶原点矩.

（2）设有随机变量 X，对正整数 k，若 $E[X-E(X)]^k$ 存在，称 $E[X-E(X)]^k$ 为随机变量 X 的 k **阶中心矩**，显然，方差为 2 阶中心矩.

（3）设有随机变量 X 与 Y，对正整数 k,l，若 $E(X^kY^l)$ 存在，称 $E(X^kY^l)$ 为随机变量 X 与 Y 的 $k+l$ **阶混合原点矩**；

（4）对于随机变量 X 与 Y 及正整数 k,l，若 $E[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l$ 存在，称 $E[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l$ 为随机变量 X 与 Y 的 $k+l$ **阶混合中心矩**，显然，协方差为 $1+1$ 阶混合中心矩.

4.1.6　协方差阵

设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)],\ i,j=1,2,\cdots,n$$

都存在，则称

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**协方差阵**，由协方差的定义可知，C 为对称矩阵.

4.1.7　几个常见分布的数字特征

表 4.1 列出了几个常见分布的数字特征，需要读者熟练掌握。

表 4.1　几个常见分布的数字特征

分布名称	概率分布	数学期望	方差
二项分布 $b(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in R$	μ	σ^2

4.2　典型例题分析

4.2.1　题型一：一维离散型随机变量的数字特征问题

例 4.2.1　随机变量 X 的取值为 $x_k=(-1)^k\dfrac{2^k}{k}$，对应的概率为 $p_k=\dfrac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$.说明 $E(X)$ 不存在.

解　由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty,$$

因此 $E(X)$ 不存在.

例 4.2.2　设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	2	3
p	a	0.4	b	0.1

且 $E(X)=1$．求：（1）常数 a,b 的值；（2）$D(e^X)$．

解　（1）由分布律的性质有

$$a+0.4+b+0.1=1,$$

且

$$E(X)=-a+2b+0.3=1,$$

解得 $a=0.1,b=0.4$；

（2）由期望的定义可知，

$$E(e^X)=e^{-1}\times 0.1+e^0\times 0.4+e^2\times 0.4+e^3\times 0.1=5.5360,$$

$$E[(e^X)^2]=(e^{-1})^2\times 0.1+(e^0)^2\times 0.4+(e^2)^2\times 0.4+(e^3)^2\times 0.1=63.3210,$$

所以

$$D(\mathrm{e}^X)=E[(\mathrm{e}^X)^2]-[E(\mathrm{e}^X)]^2=31.5565\,.$$

例 4.2.3　【2003（3）】已知甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品．从甲箱中任取3件产品放入乙箱，求：

（1）乙箱中次品件数 X 的数学期望；（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率．

解　（1）依题意，X 的可能取值为 $0,1,2,3$，并且

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}\,,\quad P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}\,,$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}\,,\quad P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}\,,$$

从而 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此 X 的数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}+=\frac{3}{2}\,,$$

（2）记 $A_i=\{X=i\},i=0,1,2,3$，$B=\{$取到的产品为次品$\}$，由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B\,|\,A_i)P(A_i)\ =0\times\frac{1}{20}+\frac{C_1^1}{C_6^1}\times\frac{9}{20}+\frac{C_2^1}{C_6^1}\times\frac{9}{20}+\frac{C_3^1}{C_6^1}\times\frac{1}{20}\ =\frac{1}{4}\,.$$

例 4.2.4　证明事件在一次试验中发生次数的方差不超过 $\frac{1}{4}$．

证　设 X 表示事件 A 在一次试验中发生次数，因此 $X\sim b(1,p)$，其中 $p=P(A)$，所以

$$D(X)=p-p^2=p(1-p)\leqslant\left[\frac{p+(1-p)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}\,.$$

4.2.2　题型二：一维连续型随机变量的数字特征问题

例 4.2.5　设随机变量 X 服从柯西分布（Cauchy），它的分布密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,,\qquad -\infty<x<+\infty\,,$$

说明 $E(X)$ 不存在．

解　由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)=+\infty\,,$$

故 $E(X)$ 不存在．

例 4.2.6　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1<x<8,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解　由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^8 x\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{15}{4},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^8 x^2\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{127}{7},$$

故

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{127}{7}-\left(\frac{15}{4}\right)^2=4.08 .$$

例 4.2.7　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}kx, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）常数 k 的值；（2） $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$；（3） $D(X)$.

解　（1）由概率密度函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 kx\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=1,$$

因此 $k=1$.

（2）根据期望的定义，

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}x\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x+1}(2-x)\mathrm{d}x$$
$$=3\ln 3-4\ln 2 .$$

（3）因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x=1,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6},$$

故

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}.$$

例 4.2.8　随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}kx^a,& 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 k,a 均大于零，且 $E(X)=0.75$．（1）求 k,a 的值；（2）设 Z 表示对 X 的 4 次独立重复观测中事件 $\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}$ 发生的次数，求 $E(Z^2)$．

解　（1）由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 kx^a\mathrm{d}x=\frac{k}{a+1}=1,$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 kx^{a+1}\mathrm{d}x=\frac{k}{a+2}=0.75,$$

故 $k=3,a=2$．

（2）因为

$$P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

因此 $Z\sim b\left(4,\dfrac{1}{8}\right)$，故 $E(Z)=\dfrac{1}{2}$，$D(Z)=\dfrac{7}{16}$，所以

$$E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=\frac{11}{16}.$$

4.2.3　题型三：二维离散型随机变量的数字特征问题

例 4.2.9　随机变量 X 与 Y 的联合分布律如表 4.2 所示，求：（1）$P\{Y>X\}$；（2）$E(X+2Y)$；（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)$．

解　（1）由题意，有

$$P\{Y>X\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.7.$$

表 4.2　联合分布律

Y \ X	-1	0	1
0	0.3	0	0.1
1	0.	0.4	0.2

（2）由于

$$E(X)=-1\times0.3+(-1)\times0+0\times0+0\times0.4+1\times0.1+1\times0.2=0,$$

$$E(Y)=0\times0.3+0\times0+0\times0.1+1\times\times0+1\times0.4+1\times0.2=0.6,$$

因此

$$E(X+2Y)=E(X)+2E(Y)=1.2.$$

（3）因为

$$E(XY)=(-1\times0)\times0.3+(-1\times1)\times0+(0\times0)\times0+(0\times1)\times0.4+(1\times0)\times0.1+(1\times1)\times0.2=-0.2,$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.2-0\times0.6=-0.2.$$

例 4.2.10　从一个装有 3 支蓝色、2 支红色、3 支绿色彩笔的盒子中，随机抽取 2 支．设 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数，求：

（1）X 与 Y 的联合分布律；（2）$E(X+2Y)$；（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)$．

解　（1）X 与 Y 的联合分布律如表 4.3 所示.

表 4.3　联合分布律

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

（2）X 和 Y 的分布律分别为

$$\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_{i\cdot} & \frac{10}{28} & \frac{15}{28} & \frac{3}{28} \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccc} Y & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_{\cdot j} & \frac{15}{28} & \frac{6}{14} & \frac{1}{28} \end{array},$$

因为

$$E(X)=\frac{21}{28}, \quad E(Y)=\frac{14}{28},$$

因此

$$E(X+2Y)=E(X)+2E(Y)=\frac{49}{28}.$$

（3）XY 的分布律为

$$\begin{array}{c|cc} XY & 0 & 1 \\ \hline p & \frac{11}{14} & \frac{3}{14} \end{array}$$

因此 $E(XY)=\frac{3}{14}$，从而

$$\operatorname{Cov}(X)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{14}-\frac{21}{28}\times\frac{14}{28}=-\frac{9}{56}.$$

例 4.2.11　设随机变量 X 和 Y 的联合分布律如表 4.4 所示。

表 4.4　联合分布律

$X \backslash Y$	−1	0	1
0	0.08	0.32	0.20
1	0.07	0.18	0.15

试求：（1）X 和 Y 的相关系数 ρ，判断 X 和 Y 的相关性；（2）$D(2X-3Y)$；（3）$P\{X>Y\}$.

解　（1）X，Y 以及 XY 的分布律分别为

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline p_{i\cdot} & 0.6 & 0.4 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline p_{\cdot j} & 0.15 & 0.5 & 0.35 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} XY & -1 & 0 & 1 \\ \hline p & 0.07 & 0.78 & 0.15 \end{array}$$

因此

$$E(X)=0.4, \quad E(Y)=0.2, \quad E(XY)=0.08,$$
$$D(X)=0.24, \quad D(Y)=0.46,$$

故

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.08-0.4\times0.2=0,$$

从而

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0.$$

因此 X 和 Y 不相关.

（2）$D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)-12\operatorname{Cov}(X,Y)=4\times0.24+9\times0.46-12\times0=5.37$.

（3） $P\{X>Y\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=0\}$

$$=0.08+0.07+0.18=0.33\text{ .}$$

例 4.2.12　随机变量 X 与 Y 的联合分布律如表 4.5 所示. 求 X 与 Y 的协方差阵.

表 4.5　联合分布律

$Y \backslash X$	−1	0	1
0	0.3	0.2	0
1	0	0.4	0.1

解　X,Y 和 XY 的分布律分别为

X	−1	0	1
$p_{i.}$	0.3	0.6	0.1

Y	0	1
$p_{.j}$	0.5	0.5

XY	−1	0	1
p	0	0.9	0.1

因此

$$E(X)=-0.2\text{，}\quad E(Y)=0.5\text{，}\quad E(XY)=0.1\text{，}$$

$$D(X)=0.36\text{，}\quad D(Y)=0.25\text{，}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.1+0.2\times 0.5=0.2\text{，}$$

故 X 与 Y 的协方差阵为 $\begin{pmatrix}0.36 & 0.2\\ 0.2 & 0.25\end{pmatrix}$.

4.2.4　题型四：二维连续型随机变量的数字特征问题

例 4.2.13　设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（1）求 $E(XY)$；（2）设 Z 表示对 (X,Y) 的 4 次独立重复观测中，观测点的纵坐标与横坐标之差不超过 5 的次数，求 $E[(Z-1)^2]$.

解　（1）**解法 1**　由于

$$E(X)=\int_0^1 x2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_5^{+\infty} y\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}y\overset{令z=y-5}{=\!=\!=}5\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z+\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z=5+1=6.$$

由 X 与 Y 的独立性，得

$$E(X)E(Y)=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

解法 2　X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-(y-5)}, & 0<x<1,y>5,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

于是

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_5^{+\infty}xy2x\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=4.$$

（2）由于

$$P=\iint\limits_{\{(x,y)|y-x\leqslant 5\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_5^{x+5}2x\mathrm{e}^{-(y-5)}\mathrm{d}y=4e^{-1}-1\approx 0.472,$$

因此 $Z \sim b(4, 0.472)$，故

$$E(Z) = 1.888, \quad D(Z) = 0.997,$$

从而

$$E(Z-1) = 0.888, \quad D(Z-1) = 0.997,$$

所以

$$E[(Z-1)^2] = D(Z-1) + [E(Z-1)]^2 = 1.786 .$$

例 4.2.14　随机变量 (X, Y) 在区域 $\{(x, y) \mid 0 < x < 1, |y| < x\}$ 上服从均匀分布．求：（1）$E(X)$ 和 $E(Y)$；（2）$\mathrm{Cov}(X, Y)$.

解　(X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \ |y| < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（1）根据期望的定义，有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{+x} x \mathrm{d}y = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{+x} y \mathrm{d}y = \int_0^1 0 \mathrm{d}x = 0 .$$

（2）因为

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{+x} xy \mathrm{d}y = 0,$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - \frac{2}{3} \times 0 = 0 .$$

例 4.2.15　设随机变量 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ 上服从均匀分布，

（1）判断 X 和 Y 的独立性；（2）X 和 Y 的相关系数 ρ，判断 X 和 Y 的相关性.

解　（1）(X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \leqslant r^2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{1}{\pi r^2} \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2}, & -r \leqslant x \leqslant r, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} \frac{1}{\pi r^2} \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - y^2}, & -r \leqslant y \leqslant r, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由于 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ 不是几乎处处成立，故 X 和 Y 不独立.

（2）由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-r}^{r}x\cdot\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-r}^{r}y\cdot\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\mathrm{d}y=0,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}xy\frac{1}{\pi r^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times 0=0,$$

因此 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$，从而 X 和 Y 不相关.

例 4.2.16　设随机变量 X 服从标准正态分布，求：（1）X 与 $|X|$ 的协方差，并判断 X 与 $|X|$ 的相关性；（2）判断 X 与 $|X|$ 是否相互独立.

解　（1）根据协方差的定义，有

$$\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|),$$

且 $E(X)=0$，又因为

$$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x|\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}-x^2f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\infty}^{0}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0,$$

故 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$，从而 X 与 $|X|$ 不相关.

（2）设 $(X,|X|)$，X 及 $|X|$ 的分布函数分别为 $F(x,y)$，$F_X(x)$ 及 $F_{|X|}(y)$，则

$$F(2,1)=P\{X\leqslant 2,|X|\leqslant 1\}=P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1,$$

$$F_X(2)F_{|X|}(1)=P\{X\leqslant 2\}P\{|X|\leqslant 1\}=\varPhi(2)[2\varPhi(2)-1],$$

因为 $F(2,1)\neq F_X(2)F_{|X|}(1)$，故 X 与 $|X|$ 不相互独立.

例 4.2.17　设随机变量 X 与 Y 相互独立，且具有相同的分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $U=aX+bY$ 与 $V=cX+dY$ 的相关系数 ρ_{UV}.

解　由于

$$D(U)=D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2,$$

$$D(V)=D(cX+dY)=c^2D(X)+d^2D(Y)=(c^2+d^2)\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX+bY,cX+dY)&=ac\mathrm{Cov}(X,X)+bd\mathrm{Cov}(Y,Y)+(ad+bc)\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=acD(X)+bdD(Y)=(ac+bd)\sigma^2,\end{aligned}$$

故

$$\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}.$$

4.2.5　题型五：随机变量函数的数字特征问题

例 4.2.18　随机变量 X,Y,Z 相互独立，且 $X\sim U(0,2),Y\sim b(8,0.2),Z\sim N(5,3)$，设 $T=-X+2Y-Z+8$，求 $E(T)$ 和 $D(T)$.

解　由于

$$E(X)=1,\quad E(Y)=1.6,\quad E(Z)=5,$$

$$D(X)=\frac{1}{3},\quad D(Y)=1.44,\quad D(Z)=3,$$

故

$$E(T)=-E(X)+2E(Y)-E(Z)+8=-1+2\times1.6-5+8=5.2,$$

$$D(T)=(-1)^2D(X)+2^2D(Y)+(-1)^2D(Z)=\frac{1}{3}+4\times1.44+3=9.0933.$$

例 4.2.19　设随机变量 X 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，令

$$Y=g(X)=\begin{cases}-1, & X<0,\\ 0, & X=0,\\ 1, & X>0.\end{cases}$$

求 $E(Y)$ 和 $D(Y)$.

解法 1　由题设可知，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0,$$

$$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

故随机变量 Y 的分布律为

Y	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

又因为

$$E(Y)=-1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=0,$$

$$E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}=1,$$

因此

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-0=1.$$

解法 2

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}(-1)\times f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}1\times f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2}^{0}(-1)\times\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}1\times\frac{1}{4}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}g^2(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}(-1)^2\times f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}1^2\times f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-2}^{0}(-1)^2\times\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}1^2\times\frac{1}{4}\mathrm{d}x=1,$$

故

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-0=1.$$

4.2.6　题型六：随机变量数字特征的应用

例 4.2.20　设想有这样一种博彩游戏，博彩者将本金 1 元押注在 1 到 6 的某个数字上，然后掷 3 颗骰子，若所押的数字出现 i（$i=1,2,3$）次，则下注者赢 i 元，否则没收 1 元本金，试问这样的游戏规则对下注者是否公平？

解　设随机变量 X 表示“下注者的每 1 元注金带来的盈利”，掷 3 颗骰子，恰好出现所押的数字的次数为 Y，则

$$Y\sim b\left(3,\frac{1}{6}\right),$$

随机变量 X 的分布律为

X	-1	1	2	3
p	$C_3^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$

即

X	-1	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

因此

$$E(X)=-1\times\frac{125}{216}+1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=-\frac{17}{216},$$

由于平均盈利小于 0，故这一游戏规则对下注者是不利的.

例 4.2.21　假定国际市场每年对我国某种出口商品的需求量 X（单位：吨）服从[2000，4000]上的均匀分布，设每售出一吨这种商品可为国家挣得外汇 3 万元，但假如销售不出而积于仓库，则每吨需浪费保养费 1 万元，求应组织多少货源，才能使国家的收益最大?

解　设组织的货源量为 k 吨，记 Y 表示“出口该商品所获得的收益”（单位：万元），则有

$$Y=g(X)=\begin{cases}3k, & X\geqslant k,\\ 3X-(k-X), & X<k.\end{cases}$$

而随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & 2000\leqslant x\leqslant 4000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{4000} g(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{k}(4x-k)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2000}\int_{k}^{4000}3k\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{1000}\,(-k^2+7000k-4\times10^6)\,,$$

可得当 $k=3500$ 时达到最大值，因此组织 3500 吨此种商品是最好的决策.

例 4.2.22　某公司生产的机器其无故障工作时间 X 是一个随机变量，其概率密度函数(单位：万小时)为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

公司每售出一台机器可获利 1600 元，若机器售出后使用 1.2 万小时之内出现故障，则公司应予以更换，这时每台机器公司亏损 1200 元；若在 1.2～2 万小时内出现故障，则予以维修，由公司负担维修费 400 元；若使用 2 万小时以后出故障，则由用户自己负责，求该公司售出每台机器的平均获利.

解　无故障工作时间 X 在各个时间段内的概率为

$$P\{X\leqslant 1.2\}=\int_{1}^{1.2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\,,$$
$$P\{1.2<X\leqslant 2\}=\int_{1.2}^{2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\,,$$
$$P\{2<X\}=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,.$$

设 Y 表示“公司每售出一台机器的获利”，因此 Y 的分布律为

Y	-1200	1200	1600
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

所以

$$E(Y)=(-1200)\times\frac{1}{6}+1200\times\frac{1}{3}+1600\times\frac{1}{2}=1000\,,$$

故该公司售出每台机器的平均获利为 1000 元.

4.3　深 化 训 练

4.3.1　填空题

（1）设随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$，且 $E[(X+1)(X-2)]=3$，则 $\lambda=$________.

（2）设随机变量 $X\sim b(n,p)$，$E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则 $n=$________，$p=$________.

（3）在 n 重伯努利试验中，事件 A 发生的概率为 p，令

$$X=\begin{cases}0, & A\text{出现奇数次},\\ 1, & A\text{出现偶数次},\end{cases}$$

则 $E(X)=$________.

（4）设随机变量 $X\sim b(n,p)$，常数 $a>0$，且 $a\neq 1$，则 $E(a^X-3)=$________.

（5）随机变量 X,Y,Z 相互独立，且 $X\sim\pi(2),Y\sim U(0,4),Z\sim N(3,2)$，设 $T=X-2Y-Z+1$. 则 $E(T)=$________，$D(T)=$________.

（6）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}f_1(x), & x\leqslant 0,\\ kf_2(x), & x>0,\end{cases}$$

其中 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为区间 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，则 $k=$_____，$E(X)=$_________.

（7）设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(X)$，令随机变量 $Y=\begin{cases}a, & X<2,\\ b, & X=2,\\ c, & X>2.\end{cases}$ 则 $E(Y)=$________.

（8）设随机变量 X 与 Y 的分布律相同，且 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$，$E(XY)=\dfrac{4}{9}$，则 $P\{X+Y\geqslant 1\}=$________.

（9）设随机变量 $(X,Y)\sim N(1,-1;2,3;0)$，则 $D(XY)=$________.

（10）【2013（3）】设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X})=$________.

（11）设随机变量 X 与 Y 满足

$$\rho_{XY}=0.6,\quad E(X)=1,\quad D(X)=2,\quad E(Y)=0,\quad D(Y)=8,$$

则 $E[(X+Y)^2]=$________.

（12）设随机变量 X 与 Y 相关系数 $\rho_{XY}=0.6$，令 $Z=-3X+1$，则 $\rho_{ZX}=$________，$\rho_{ZY}=$________，

（13）有随机变量 X 与 Y，若 $D(X)=D(Y)=D(X+Y)\neq 0$. 则 X 与 Y 相关系数 ρ_{XY} 为________.

（14）【2004（1，3）】设 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$________.

（15）【2010（1）】设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!},k=0,1,2,\cdots$，则 $E(X^2)=$________.

（16）【2008（3）】设 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$________.

（17）【2011（1，3）】设二维随机变量（X，Y）服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$________.

4.3.2　单项选择题

（1）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且方差分别是 6 和 3，则 $D(-2X+Y)=$（　　）.

（A）9　　（B）15　　（C）–21　　（D）27

（2）设随机变量 X 和 X^2 的数学都存在，则一定有（　　）.

（A）$E(X^2)\geqslant E(X)$　　（B）$E(X^2)\geqslant [E(X)]^2$

（C）$E(X^2)\leqslant E(X)$　　（D）$E(X^2)\leqslant [E(X)]^2$

（3）若设随机变量 X 概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}\right)}$，$-\infty<x<+\infty$，则 $Y=$（　　）服从标准正态分布.

（A）$\dfrac{X+3}{2}$　　（B）$\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$　　（C）$\dfrac{X-3}{2}$　　（D）$\dfrac{X-3}{\sqrt{2}}$

（4）【2009（1）】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数，则 $E(X)=$（　　）.

（A）0　　（B）0.3　　（C）0.7　　（D）1

（5）【2012（1）】将长为 l 的木棒随机截成两段，则两段木棒长度的相关系数为（　　）.

（A）1　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）–1

（6）随机变量 X,Y，且有 $P\{Y=-2X+1\}=1$，则 $\rho_{XY}=$（　　）.

（A）–2　　（B）1　　（C）–1　　（D）无法确定

（7）【2008（1，3）】设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　　）.

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$　　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$

（8）设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 独立是 X 与 Y 不相关的（　　）.

（A）充分条件，但不是必要条件　　（B）必要条件，但不是充分条件

（C）充分必要条件　　（D）无法确定

（9）设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，且 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）X 与 Y 一定独立　　（B）X 与 Y 不一定独立

（C）(X,Y) 服从二维正态分布　　（D）无法确定

（10）设有二维随机变量 X,Y，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件是（　　）.

（A）$E(X)=E(Y)$　　（B）$E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

（C）$E(X^2)=E(Y^2)$　　（D）$E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

（11）【2011（1）】设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X),E(Y)$ 均存在．记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$．则 $E(UV)=$（　　）.

（A）$E(U)E(V)$　（B）$E(X)E(Y)$　（C）$E(U)E(Y)$　（D）$E(X)E(V)$

（12）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且方差 $\sigma^2>0$，令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则（　　）成立.

（A）$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　（B）$\mathrm{Cov}(X_n,Y)=\sigma^2$

（C）$D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$　　（D）$D(X_n-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$

4.3.3　已知盒内有 12 只乒乓球，其中 9 只白球，3 只黄球，采取不放回抽样，每次抽取一只直到取到白球为止．求下列随机变量的数学期望及方差：

（1）抽取次数 X；（2）取到的黄球只数 Y．

4.3.4　假如一手机收到的所有短信中有 2%是广告短信，则相邻的两次广告短信之间平均有多少条非广告短信？

4.3.5　设有射手 9 人，其射击技术不相上下，已知每人射击中靶的概率均为 0.8．现进行射击训练，各自打中靶为止，但限制每人最多只打 3 次，问一场训练下来，大约消耗多少发子弹？

4.3.6　设有 n 把钥匙以及相配对的 n 把锁，但不知哪把钥匙开哪把锁．每把钥匙、每把锁都只尝试一次，求能被打开锁的平均把数.

4.3.7　在灯谜晚会上，一个猜谜者需猜两道谜语（谜语 a 和 b）．猜谜者可自己选择先后顺序去猜谜，按照规定只有第一次猜对了才能接着猜另一个，假设每个人猜对谜 a 和猜对谜 b 是相互独立的，概率分别为 0.7 和 0.8，规定猜对谜 a 和猜对谜 b 分别可得 12 分和 8 分，试问猜谜者首先猜哪道谜语才能平均起来获分更高？

4.3.8　设二维随机变量 (X,Y) 在单位圆内服从均匀分布，对 (X,Y) 做 5 次独立重复观测，设 Z 表示观测点的横、纵坐标之和超过 1 的次数，求 $E[(Z-1)^2]$．

4.3.9　乘客乘电梯从低层到电视塔顶层观光，电梯在每个整点的第 5 分钟、第 25 分钟、第 55 分钟从底层起行，假定某游客的到达时间均匀分布在早上 8 点至 9 点之间，求游客的平均等待时间.

4.3.10　某保险公司规定，如果在一年内某事件 A 发生，该公司就要赔偿顾客 a 元．已知一年内事件 A 发生的概率为 p，那么为使公司收益的期望值等于 a 的 10%，该公司应该要求顾客一年交多少保险费.

4.3.11　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

试求：（1）系数 c；（2）$D(X)$．

4.3.12　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\leqslant x<4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

且 $E(X)=2, P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$．求：（1）常数 a,b,c 的值；（2）$E(\mathrm{e}^X)$．

4.3.13　【2014（1，3）】设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2},$$

给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 $Y\sim U(0,i),\ i=1,2$．试求：

（1）Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（2）$E(Y)$.

4.3.14　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，$-\infty<x<+\infty$，求 $Y=\min\{|X|,\sqrt{3}\}$ 的数学期望 $E(Y)$.

4.3.15　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从标准正态分布．求 $Z=|X-Y|$ 的数学期望和方差.

4.3.16　设随机变量 X 在区间 $(1,5)$ 上服从均匀分布，在 $X=x$ $(1<x<5)$ 的条件下，随机变量 Y 服从参数为 $\dfrac{1}{x}$ 的指数分布，求 $E(XY)$, $E(X+Y)$.

4.3.17　在区间 $[0,1]$ 上任取 n 个点，求其中相距最远的两点距离的数学期望.

4.3.18　设一次试验成功的概率为 p，进行 100 次独立重复试验．问 p 为何值时，成功次数的标准差的值最大，最大值是多少？

4.3.19　设常数 a、b 分别为随机变量 X 的所有可能取值中的最小值和最大值，$E(X), D(X)$ 分别为 X 的数学期望和方差．试证明：

（1）$a\leqslant E(X)\leqslant b$；（2）$D(X)\leqslant\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.

4.3.20　随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 均存在，试证明：

$$D(X)=0\Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1.$$

4.3.21　随机变量 X 与 Y 的数学期望和方差均存在，且 X 与 Y 相互独立，试证明

$$D(XY)\geqslant D(X)D(Y).$$

4.3.22　设随机变量 X 的分布函数为 $F(X)$，且 $E(X)$ 存在，试证明：

（1）$E(X)=-\int_{-\infty}^{0}F(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x$；

（2）$E(|X|)=\int_{-\infty}^{0}F(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x$.

4.3.23　（Jensen 不等式）设随机变量 X 的值域是区域 (a,b) $(-\infty<a<b<+\infty)$，$g(x)$ 是 (a,b) 上的连续凸函数．设 $E(X)$，$E[g(X)]$ 均存在，试证明：$E[g(X)]\geqslant g[E(X)]$.

4.3.24　按季节出售的某种应时果品，每售出 1 吨获利 a 元，如果到季末尚有剩余，则每 1 吨净亏损 b 元，假设每年该果品的需求量 X 服从参数为 θ 的指数分布，问此商店应进货多少才能获得最大的平均利润？

4.3.25　设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\leqslant-1,\\ 1, & 若U>-1.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & 若U\leqslant 1,\\ 1, & 若U>1.\end{cases}$$

试求：（1）X 和 Y 的联合概率分布；（2）$D(X+Y)$.

4.3.26　设 (X,Y) 的分布律如表 4.6 所示。

求：（1）$E(X), E(Y), E(3X+Y)$；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

4.3.27　随机变量 U 与 V 独立同分布，已知 U 的分布律为 $P\{U=i\}=\dfrac{1}{3}, i=1,2,3$．令 $X=\max\{U,V\}$，$Y=\min\{U,V\}$，试求：

（1）(X,Y) 的分布律；（2）$E\left(\dfrac{1}{|2X-Y|+1}\right)$；（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

4.3.28　设随机变量 X 和 Y 的联合分布律如表 4.7 所示.
试求：（1）$P\{X+2Y<1\}$；（2）X 和 Y 的相关系数 ρ，判断 X 和 Y 的相关性和独立性.

表 4.6　分布律

Y \ X	0	$\frac{1}{3}$	1
−1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$

表 4.7　联合分布律

X \ Y	−1	0	1
1	0.2	0.4	0
2	0.3	0	0.1

4.3.29　已知随机变量

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{pmatrix},$$

（1）求 $P\{X=2Y\}$；（2）$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$；（3）X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}，判断 X 和 Y 的相关性.

4.3.30　随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0<x<2,\ 0<2y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：（1）参数 k 的值；（2）$E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$；（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

4.3.31　设二维随机变量 (X,Y) 在以 $(0,0),(0,1),(1,0)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布．求：（1）X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}，判断 X 和 Y 的相关性；（2）$D(X+Y)$.

4.3.32　设 $X\sim U[-1,1]$，$Y=X^2$，判断 X 与 Y 的相关性.

4.3.33　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}[\phi_1(x,y)+\phi_2(x,y)]$，其中 $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ 都是二维正态分布的概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1.

（1）求随机变量 X 与 Y 的概率密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，及 X 和 Y 的相关系数；

（2）判断 X 与 Y 是否独立.

4.3.34　已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,9)$ 和 $N(0,16)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$.

（1）求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；

（2）求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

（3）问 X 与 Z 是否相互独立，为什么？

4.3.35　已知二维随机变量 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，试求 $Z_1=X+Y$ 和 $Z_2=2X-Y$ 的相关系数 $\rho_{Z_1Z_2}$.

4.3.36　随机变量 X 与 Y 的数学期望与方差都存在，试证明：随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关的充分必要条件是 $D(X)=D(Y)$.

4.3.37　设 A,B 是两个随机事件，令随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生}.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

试证明：（1）随机变量 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})}}$；

（2）X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow A$ 与 B 相互独立.

4.4　深化训练详解

4.3.1　填空题

（1）$\sqrt{5}$；**提示**　由于 $X\sim\pi(\lambda)$，故 $E(X)=\lambda,\ D(X)=\lambda$，因此

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2,$$

而

$$\begin{aligned}E[(X+1)(X-2)]&=E(X^2-X-2)=E(X^2)-E(X)-2\\&=\lambda+\lambda^2-\lambda-2=\lambda^2-2=3,\end{aligned}$$

故 $\lambda=\sqrt{5}$.

（2）6，0.4；**提示**　由于 $X\sim b(n,p)$，因此

$$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p),$$

故

$$np=2.4,\quad np(1-p)=1.44,$$

解得 $n=6$，$p=0.4$.

（3）$\dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$；**提示**　在 n 重伯努利试验中，事件 A 发生 k 次的概率为

$$C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n,\quad p+q=1,$$

因此

$$P\{X=1\}=C_n^0p^0q^n+C_n^2p^2q^{n-2}+C_n^4p^4q^{n-4}+\cdots=\frac{(q+p)^n+(q-p)^n}{2}=\frac{1+(1-2p)^n}{2},$$

$$P\{X=0\}=1-P\{X=1\}=\frac{1-(1-2p)^n}{2},$$

所以 X 的分布律为

X	0	1
p	$\dfrac{1-(1-2p)^n}{2}$	$\dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$

故 $E(X)=\dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$.

（4）$(ap+1-p)^n-3$；**提示**　X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

因此

$$\begin{aligned}E(a^X-3)&=\sum_{k=0}^{n}(a^k-3)P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n}(a^k-3)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}a^kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}3C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ap)^k(1-p)^{n-k}-3\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\&=(ap+1-p)^n-3.\end{aligned}$$

（5）-4，$\dfrac{28}{3}$；**提示**　由于 $E(X)=2,\ E(Y)=2,\ E(Z)=3$，故

$$E(T)=E(X)-2E(Y)-E(Z)+1=-4;$$

又因为

$$D(X)=2,\ D(Y)=\frac{4}{3},\ D(Z)=2,$$

故

$$D(T)=D(X)+4D(Y)+D(Z)=\frac{28}{3}.$$

（6）1，$-\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}+\dfrac{9}{8}$；**提示**　由已知有

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\qquad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

根据概率密度的性质，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}kf_2(x)\mathrm{d}x=1,$$

所以

$$\frac{1}{2}\Phi(0)+\int_0^3 k\frac{1}{4}\mathrm{d}x=1,$$

故 $k=1$，

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}x\frac{1}{2}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}xf_2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{0}x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}x\frac{1}{4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}+\frac{9}{8}.$$

（7）$aF(2-0)+c[1-F(2)]$；**提示**　Y 的分布律为

Y	a	b	c
p	$P\{X<2\}$	$P\{X=2\}$	$P\{X>2\}$

即

Y	a	b	c
p	$F(2-0)$	0	$1-F(2)$

（8）$\frac{8}{9}$；**提示**　设 XY 的分布律为 $\begin{array}{c|cc} XY & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p_{11} & p_{11}\end{array}$，因此 $E(XY)=p_{11}=\frac{4}{9}$，即 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{9}$，从而 (X,Y) 的分布律如表 4.8 所示.

表 4.8　分布律

X \ Y	0	1	p_i
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
p_j	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

故

$$P\{X+Y\geqslant 1\}=1-P\{X+Y<1\}$$

$$=1-P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

（9）11；**提示**　由已知有 X 与 Y 相关系数为 0，因此 X 与 Y 相互独立，且

$$X\sim N(1,2),\quad Y\sim N(-1,3),$$

从而

$$E(X)=1,\ D(X)=2,\quad E(Y)=-1,\ D(Y)=3,$$

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=3,\quad E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=4.$$

故

$$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=3\times 4=12.$$

$$D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=E(X^2Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$=12-1^2\times(-1)^2=11.$$

（10）$2\mathrm{e}^2$；**提示**　由题意，有

$$E(X\mathrm{e}^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{2x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}+2}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^2.$$

（11）15.8；**提示**　$E[(X+Y)^2]=D(X+Y)+[E(X+Y)]^2$，而

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\sqrt{D(X)D(Y)}\rho_{XY}=2+8+2\times\sqrt{2\times 8}\times 0.6=14.8,$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1,$$

故 $E[(X+Y)^2]=15.8$.

（12）$-1,-0.6$；**提示**　由于 $Z=-3X+1$，因此 X 与 Z 完全负相关，故 $\rho_{ZX}=-1$，

$$\rho_{ZY}=\frac{\mathrm{Cov}(Z,Y)}{\sqrt{D(Z)D(Y)}}=\frac{\mathrm{Cov}(-3X+1,Y)}{\sqrt{D(-3X+1)D(Y)}}=\frac{(-3)\times\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{9D(X)D(Y)}}$$

$$=-\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\rho_{XY}=-0.6 .$$

（13）-0.5；**提示**　由于

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\sqrt{D(X)D(Y)}\rho_{XY}$$

由已知

$$-D(X)=2\sqrt{D(X)D(X)}\rho_{XY},$$

故 $\rho_{XY}=-0.5$.

（14）$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；**提示**　X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

且 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}, D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$，因此

$$P\{X>\sqrt{D(X)}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}} .$$

（15）2；根据分布律的性质有 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{C}{k!}=C\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}=C\mathrm{e}=1$，从而 $C=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}, k=0,1,2,\cdots,$$

即 $X\sim\pi(1)$，故

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1+1=2 .$$

（16）$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$；X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1},\ k=0,1,2,\cdots,$$

且

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)^2]=1+1=2$$

故

$$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2!}\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{2\mathrm{e}} .$$

（17）$\mu(\sigma^2+\mu^2)$；　由已知有 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\rho_{XY}=0$，因此 X与Y 相互独立，故

$$E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=\mu\{D(Y)+[E(Y)]^2\}=\mu(\sigma^2+\mu^2).$$

4.3.2　单项选择题

（1）D；　　（2）B；

（3）B；**提示**　由于

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+3)^2}{4}},\ -\infty<x<+\infty,$$

因此 $X\sim N(-3,2)$，故 $Y=\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$．故选项 B 正确．

（4）C；X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=0.3\phi(x)+0.35\phi\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

其中 $\phi(x)$ 表示标准正态分布的概率密度，从而

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi(x)\mathrm{d}x+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=0.3\times0+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x=0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2y+1)\phi(y)\mathrm{d}y=1.4\int_{-\infty}^{+\infty}y\phi(y)\mathrm{d}y+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\mathrm{d}y\\&=1.4\times0+0.7\times1=0.7,\end{aligned}$$

故选项 C 正确．

（5）D；设两段的长度分别为 X,Y，则有 $X+Y=l$，即 $Y=-X+l$，因此 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=-1$，故选项 D 正确．

（6）C；**提示**　由于 $P\{Y=-2X+1\}=1$，由相关系数的性质可得 X,Y 的相关系数为 -1，故 C 正确．

（7）D；由于 $\rho_{XY}=1$，因此 $P\{Y=aX+b\}=1$，且 $a>0$，而

$$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b=b,$$

$$D(Y)=D(aX+b)=a^2D(X)=a^2,$$

因此 $Y\sim N(1,4)$，所以 $b=1, a=2$，故选项 D 正确．

（8）C；**提示**　设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $\rho_{XY}=\rho$，

$$X\text{ 与 }Y\text{ 独立}\Leftrightarrow\rho=0\Leftrightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 不相关}.$$

故选项 C 正确．

（9）B；**提示**　$\mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow X$与$Y$ 不相关，故选项 B 正确．

（10）B；**提示**　$\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=0\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&\Leftrightarrow D(X)=D(Y)\Leftrightarrow E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2,\end{aligned}$$

故选项 B 正确．

（11）B；**提示**　由于

$$UV=\max\{X,Y\}\cdot\min\{X,Y\}=XY,$$

所以 $E(UV)=E(XY)$.

（12）A；**提示**

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}D(X_1)+0=\frac{\sigma^2}{n},$$

用类似的方法可以得到 $\mathrm{Cov}(X_n,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

$$\begin{aligned}D(X_1+Y)&=D\left(X_1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=D\left(\frac{n+1}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n\right)\\&=D\left(\frac{n+1}{n}X_1\right)+D\left(\frac{1}{n}X_2\right)+\cdots+D\left(\frac{1}{n}X_n\right)\\&=\frac{(n+1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\sigma^2+\cdots+\frac{1}{n^2}\sigma^2=\frac{n+3}{n}\sigma^2,\end{aligned}$$

同理可得 $D(X_n+Y)=\dfrac{n+3}{n}\sigma^2$，故选项 A 正确.

4.3.3　（1）X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

因此

$$E(X)=1\times\frac{3}{4}+2\times\frac{9}{44}+3\times\frac{9}{220}+4\times\frac{1}{220}=1.3,$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{4}+2^2\times\frac{9}{44}+3^2\times\frac{9}{220}+4^2\times\frac{1}{220}=2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.31.$$

（2）Y 的分布律为

Y	0	1	2	3
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

因此

$$E(Y)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{9}{44}+2\times\frac{9}{220}+3\times\frac{1}{220}=0.3,$$

$$E(Y^2)=0^2\times\frac{3}{4}+1^2\times\frac{9}{44}+2^2\times\frac{9}{220}+3^2\times\frac{1}{220}=0.409$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.319.$$

4.3.4　设 X 表示“相邻两次广告短信之间收到的不是广告短信的次数”，则

$$P\{X=k\}=0.02(1-0.02)^k, k=0,1,2,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k0.02(1-0.02)^k=0.02(1-0.02)\sum_{k=0}^{+\infty}k(1-0.02)^{k-1}=\frac{1-0.02}{0.02}=49.$$

4.3.5　设 X_i 表示第 i 名射手所需的子弹数目，$i=1,2,\cdots,9$，X_i 的分布律为

X_i	1	2	3
p	0.8	0.16	0.04

所以

$$E(X_i)=1.24, \quad \sum_{i=1}^{9}E(X_i)=9\times1.24=11.16,$$

大约消耗 12 发子弹.

4.3.6　将 n 个钥匙分别编号 $1,2,\cdots,n$，将 n 把锁也分别编号 $1,2,\cdots,n$，设 X 表示能被打开的锁的数目，

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{个钥匙恰好能打开第}k\text{把锁}, \\ 0, & \text{否则},\end{cases} \quad k=1,2,\cdots,n,$$

则 $X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$，因此 $E(X_k)=\frac{1}{n}$，故

$$E(X)=E(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=n\times\frac{1}{n}=1.$$

4.3.7　首先，设 X 表示先猜谜 a 的获分，X 的分布列为

X	0	12	20
P	0.3	0.14	0.56

其次，设 Y 表示先猜谜 b 的获分，Y 的分布列为

Y	0	8	20
P	0.2	0.24	0.56

先猜谜 a 的平均获分为

$$E(X)=0\times0.3+12\times0.14+20\times0.56=12.88,$$

先猜谜 b 的平均获分为

$$E(Y)=0\times0.2+12\times0.24+20\times0.56=13.12,$$

即先猜谜 b 的平均获分比先猜谜 a 的平均获分高.

4.3.8　由题意，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\leqslant1, \\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

因此

$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}1\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$$

所以 $Z\sim b\left(5,\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$，从而

$$E(Z)=5\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right),\quad D(Z)=5\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

故

$$\begin{aligned}E[(Z-1)^2]&=E(Z^2-2Z+1)=E(Z^2)-2E(Z)+1\\&=D(Z)+[E(Z)]^2-2E(Z)+1=\frac{5\pi^2}{4}-5\pi+\frac{17}{2}.\end{aligned}$$

4.3.9　设 X 表示此游客的到达时间，因此 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 Y 表示此游客的等待时间，则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0\leqslant X\leqslant 5,\\ 25-X, & 5<X\leqslant 25,\\ 55-X, & 25<X\leqslant 55,\\ 60-X+5, & 55<X\leqslant 60,\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^5(5-x)\frac{1}{60}\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\frac{1}{60}\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\frac{1}{60}\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\frac{1}{60}\mathrm{d}x\\&=11.67.\end{aligned}$$

4.3.10　设顾客一年交 k 元保险费，保险公司的收益为 X 元，因此

$$X=\begin{cases}k-a, & A\text{发生},\\ k, & A\text{不发生}.\end{cases}$$

X 的分布律为 $\begin{pmatrix}k-a & k\\ p & 1-p\end{pmatrix}$，故

$$E(X)=k(1-p)+(k-a)p=k-ap,$$

而保险公司要求收益的期望值等于 a 的 10%，即 $E(X)=\frac{a}{10}$，因此 $k=a(p+0.1)$ 元.

4.3.11　（1）由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{c}{2k^2}=1,$$

解得 $c=2k^2$.

（2）由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot 2k^2x\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=2k^2\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2k},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot 2k^2x\mathrm{e}^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{k^2},$$

故

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{k^2}-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\right)^2=\frac{4-\pi}{4k^2}.$$

4.3.12　（1）由概率密度的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}ax\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}(cx+b)\mathrm{d}x=2a+6c+2b=1,$$

又因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}xax\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}x(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b=2,$$

$$P\{1<X<3\}=\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}ax\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(cx+b)\mathrm{d}x,$$

$$=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b=\frac{3}{4},$$

故 $a=\frac{1}{4},b=1,c=-\frac{1}{4}$.

（2）$E(\mathrm{e}^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\mathrm{e}^x\frac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}\mathrm{e}^x\left(-\frac{x}{4}+1\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2+1}{4}$.

4.3.13　（1）根据分布函数的定义，有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}.\end{aligned}$$

而 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 的概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid i)=\begin{cases}\frac{1}{i}, & 0<y<i,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此，当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0<y<1$ 时，

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}\int_0^y 1\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\times\frac{y}{2}=\frac{3y}{4};$$

当 $1\leqslant y<2$ 时，

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{2+y}{4}.$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$．故 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{3y}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{2+y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

（2）Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot\frac{3}{4}\mathrm{d}y+\int_1^2 y\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

4.3.14　由题意，有

$$\begin{aligned}E(Y)&=E[\min\{|X|,\sqrt{3}\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,\sqrt{3}\}f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|x|f(x)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\sqrt{3}f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{3}}^{0}(-x)f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{3}}xf(x)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\sqrt{3}f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{3}}^{0}(-x)\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^{\sqrt{3}}x\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\sqrt{3}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^{\sqrt{3}}x\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x+2\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\sqrt{3}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\arctan x\Big|_{\sqrt{3}}^{+\infty}\\
&=\frac{2\ln 2}{\pi}+\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

4.3.15　由于 X 和 Y 相互独立，所以 $U=X-Y$ 服从正态分布，又

$$E(U)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0,$$

$$D(U)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)=1+1=2,$$

因此 $U\sim N(0,2)$．因此

$$E(Z)=E(|X-Y|)=E(|U|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|f(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}u\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$
$$E(Z^2)=E(|X-Y|^2)=E(|U|^2)=E(U^2)=D(U)+[E(U)]^2=2,$$

从而

$$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=2-\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2=2-\frac{1}{\pi}.$$

4.3.16　由题意，

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-xy}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 X 与 Y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{x}{4}\mathrm{e}^{-xy}, & 1<x<5,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_1^5\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}xy\frac{x}{4}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_1^5\frac{x}{4}\times\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1.$$

又因为 X 在区间 $(1,5)$ 上服从均匀分布，所以 $E(X)=3$． 而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_1^5\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{x}{4}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_1^5\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln 5}{4},$$

故

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3+\frac{\ln 5}{4}.$$

4.3.17　设 X_i 表示取到的第 i 个点，则 $X_i\sim U(0,1),\ i=1,2,\cdots,n$， X_i 的分布函数为

$$F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}0, & x_i<0,\\ x_i, & 0\leqslant x_i\leqslant 1,\\ 1, & x_i>1.\end{cases}$$

因此 $Z=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Z(x)=F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)\cdots F_{X_n}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^n, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Z 的概率密度为

$$f_Z(x)=\frac{\mathrm{d}F_Z(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_Z(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xnx^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}.$$

$Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=1-[1-F_{X_1}(y)][1-F_{X_2}(y)]\cdots[1-F_{X_n}(y)]=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-(1-y)^n, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}n(1-y)^{n-1}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 yn(1-y)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

故相距最远两个点的距离的数学期望为

$$E(Z-Y)=E(Z)-E(Y)=\frac{n-1}{n+1}.$$

4.3.18　设 X 表示 100 次独立重复试验成功的次数，则 $X\sim b(100,p)$， 因此

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{100p(1-p)}=\sqrt{25-100(p-0.5)^2},$$

故 $p=0.5$ 时，成功次数的标准差 $\sqrt{D(X)}$ 的值最大，最大值为 $\sqrt{25}=5$.

4.3.19　（1）由于 $a\leqslant X\leqslant b$，故 $a\leqslant E(X)\leqslant b$；

（2）$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}\leqslant E\left(X-\frac{b-a}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

4.3.20　“$\Leftarrow$”由于 $P\{X=E(X)\}=1$，设 $c=E(X)$，因此 $E(X)=c,\ E(X^2)=c^2$，故 $D(X)=0$；“$\Rightarrow$”假设 $P\{X=E(X)\}<1$，因此存在 $\varepsilon>0$，使得 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}>0$，而由切比雪夫不等式得，对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=0,$$

即 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}=0$，矛盾，故 $P\{X=E(X)\}=1$.

4.3.21　由于

$$\begin{aligned}D(XY)-D(X)D(Y)&=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2-D(X)D(Y)\\&=E(X^2)E(Y^2)-(EX)^2(EY)^2-D(X)D(Y)\\&=[D(X)+(EX)^2][D(Y)+(EY)^2]-D(X)D(Y)\\&=(EX)^2D(Y)+D(X)(EY)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

故

$$D(XY) \geqslant D(X)D(Y) .$$

4.3.22 （1）

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}F(x) + \int_{0}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}F(x) - \int_{0}^{+\infty} x\mathrm{d}[1-F(x)] \\ &= xF(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F(x)\mathrm{d}x - x[1-F(x)]\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} [1-F(x)]\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{0} F(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} [1-F(x)]\mathrm{d}x ; \end{aligned}$$

（2）由（1）可知

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}F(x) + \int_{0}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_{-\infty}^{0} F(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} [1-F(x)]\mathrm{d}x . \end{aligned}$$

4.3.23 由凸函数的性质有

$$g(X) \geqslant g[E(X)] + g'[E(X)][X-E(X)] ,$$

因此

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\geqslant E\{g[E(X)] + g'[E(X)][X-E(X)]\} \\ &= g[E(X)] + g'[E(X)]E[X-E(X)] = g[E(X)] . \end{aligned}$$

4.3.24 设此商店应进货量为 k 吨，果品的销售利润为 Y，则

$$Y = g(X) = \begin{cases} ak, & X > k, \\ aX - b(k-X), & X \leqslant k. \end{cases}$$

X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{k} (ax - b(k-x))\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x + \int_{k}^{+\infty} ak\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x \\ &= -\theta(a+b)(\mathrm{e}^{-\frac{k}{\theta}} - 1) - bk , \end{aligned}$$

上式对 k 求导，令导函数等于零，有 $k = \theta\ln\dfrac{a+b}{b}$，故进货 $\theta\ln\dfrac{a+b}{b}$ 吨商品才能获得最大的平均利润.

4.3.25 （1）随机变量 U 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & -2 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

而 X 和 Y 的 4 个可能取值为 $(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$，且

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=P\{U\leqslant -1\}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{4}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=P\{\varnothing\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=P\{-1<U\leqslant 1\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\int_{1}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

故得 X 和 Y 的联合概率分布如表 4.9 所示.

表 4.9　联合概率分布

Y \ X	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

（2）$X+Y$ 及 $(X+Y)^2$ 的概率分布相应为

$$X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad (X+Y)^2\sim\begin{pmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

从而

$$E(X+Y)=(-2)\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=0,\quad E[(X+Y)^2]=0\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=2,$$

故

$$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=2.$$

4.3.26　（1）$E(X)=\dfrac{19}{36}$，$E(Y)=\dfrac{5}{12}$，

$$E(3X+Y)=3E(X)+E(Y)=3\times\frac{19}{36}+\frac{5}{12}=2.$$

（2）$$E(XY)=0\times(-1)\times 0+0\times 0\times\frac{1}{6}+0\times 2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\times(-1)\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 0\times 0$$
$$+\frac{1}{3}\times 2\times 0+1\times(-1)\times\frac{1}{12}+1\times 0\times 0+1\times 2\times\frac{1}{3}=-\frac{19}{36},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.7477.$$

4.3.27　（1）(U,V) 的分布律如表 4.10 所示.

因此 (X,Y) 的分布律如表 4.11 所示.

（2）$\dfrac{1}{|2X-Y|+1}$ 的分布律为

$\frac{1}{\lvert 2X-Y\rvert+1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
p	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

因此

$$E\left(\frac{1}{|2X-Y|+1}\right)=\frac{139}{540};$$

表 4.10　分布律

U \ V	1	2	3	
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

表 4.11　分布律

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

（3）X,Y 和 XY 的分布律分别为

X	1	2	3
p	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

Y	1	2	3
p	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

XY	1	2	3	4	6	9
p	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

因此

$$E(X)=\frac{22}{9},\quad E(Y)=\frac{14}{9},\quad E(XY)=4,$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{16}{81}.$$

4.3.28　（1）$P\{X+2Y<1\}=P\{X=1,Y=-1\}+\{X=2,Y=-1\}=0.5$.

（2）X,Y 和 XY 的分布律分别为

X	1	2
$p_{i\cdot}$	0.6	0.4

Y	-1	0	1
$p_{\cdot j}$	0.5	0.4	0.1

XY	-2	-1	0	1	2
p	0.3	0.2	0.4	0	0.1

因此

$$E(X)=1.4,\quad E(Y)=-0.4,\quad E(XY)=-0.6,$$

$$D(X)=0.24,\quad D(Y)=0.76,$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.6-1.4\times(-0.4)=-0.04,$$

从而

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-0.094,$$

因此 X 和 Y 有一定的线性相关性；由于相关一定不独立，故 X 和 Y 不独立.

4.3.29　（1）由已知

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{XY=1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2,Y=2\}=P\{XY=4\}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=P\{XY=2\}=0,$$

因此 (X,Y) 的分布律如表 4.12 所示.

表 4.12　分布律

Y \ X	0	1	2	p_j
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
p_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

从而

$$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}.$$

（2）由于

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y),$$

而

$$E(XY)=\frac{2}{3},\quad E(X)=\frac{2}{3},\quad E(Y)=1,\quad E(Y^2)=\frac{5}{3},\quad D(Y)=\frac{2}{3},$$

故 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=-\frac{2}{3}$.

（3）由于

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$$

故 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$，从而 X 和 Y 的不相关.

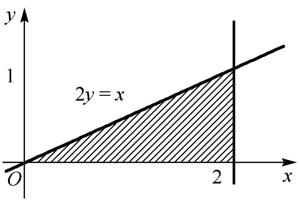


图 4.1　示意图

4.3.30　（1）如图 4.1 所示，由概率密度的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}kxy\mathrm{d}y=1,$$

因此 $k=2$；

（2）$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}2\mathrm{d}y=\int_0^2x\mathrm{d}x=2$；

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}x2xy\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x^4}{4}\mathrm{d}x=\frac{8}{5}$,

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}y2xy\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x^4}{12}\mathrm{d}x=\frac{8}{15},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}(xy)f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}xy2xy\mathrm{d}y=\frac{8}{9},$$

从而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{8}{9}-\frac{8}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{225}.$$

4.3.31　（1）如图 4.2 所示，设 $S=\{(x,y)\,|\,0<x<1, 0<y<1-x\}$，$S$ 的面积为 $\frac{1}{2}$，因此，(X,Y) 的概率密度为

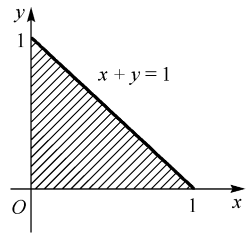


图 4.2　示意图

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1,\ 0<y<1-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$E(X)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} x2\mathrm{d}y=\frac{1}{3},$$

$$E(X^2)=\iint\limits_D x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} 2x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6},$$

从而

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

同理 $E(Y)=\frac{1}{3}, D(Y)=\frac{1}{18}$. 而

$$E(XY)=\iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} 2xy\mathrm{d}y=\frac{1}{12}.$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}.$$

且

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{2},$$

由此可知 X 和 Y 线性相关.

（2）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+2\times\left(-\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{18}.$

4.3.32　由已知，有 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

故 $E(X)=0$，因此

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X^3),$$

而

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x=0,$$

从而 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即 $\rho=0$，X 和 Y 不相关.

4.3.33 （1）由于二维正态分布的边缘分布为正态分布，因此 $\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)$ 的边缘分布均为标准正态分布，所以

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(x,y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_2(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(x,y)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_2(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},$$

因此 $X\sim N(0,1),\ Y\sim N(0,1)$，所以

$$E(X)=0,\ E(Y)=0，\ D(X)=1,\ D(Y)=1,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\phi_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\phi_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0,$$

因此 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，故 X 与 Y 的相关系数 $\rho=0$.

（2）由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 不是几乎处处成立，故 X 与 Y 不独立.

4.3.34 （1）$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}.$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{4}\times16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=-\frac{1}{2}\times3\times4=-6$$

所以

$$D(Z)=1+4-6\times\frac{1}{3}=3.$$

（2）因为

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\times(-6)=\frac{9}{3}-3=0,$$

所以

$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)D(Z)}}=0.$$

（3）由 $\rho_{XZ}=0$，可知 X 与 Z 不相关．又因为

$$Z\sim N\left(\frac{1}{3},3\right),X\sim N(1,9),$$

所以 X 与 Z 也相互独立．

4.3.35　由已知　$D(X)=5,\ D(Y)=4,\ \mathrm{Cov}(X,Y)=1$　，从而

$$D(Z_1)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)-\mathrm{Cov}(X,Y)=8,$$

$$D(Z_2)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=20,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)&=\mathrm{Cov}(X+Y,2X-Y)\\&=2\mathrm{Cov}(X,X)+2\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=2D(X)+\mathrm{Cov}(Y,X)-D(Y)=7,\end{aligned}$$

故

$$\rho_{Z_1Z_1}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{7}{\sqrt{8\times 20}}=\frac{7}{40}\sqrt{10}.$$

4.3.36　
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=E(UV)-E(U)E(V)\\&=E\left[(X+Y)(X-Y)\right]-E(X+Y)E(X-Y)\\&=E(X^2)-E(Y^2)-\left[E(X)\right]^2+\left[E(Y)\right]^2\\&=D(X)-D(Y),\end{aligned}$$

$U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Cov}(U,V)=0$ $\Leftrightarrow$ $D(X)=D(Y)$.

4.3.37　（1）X,Y 的分布律分别为

X	0	1
p	$P(\overline{A})$	$P(A)$

Y	0	1
p	$P(\overline{B})$	$P(B)$

XY 的分布律为

XY	0	1
p	$P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})$	$P(AB)$

因此

$$E(X)=0\times P(\overline{A})+1\times P(A)=P(A),$$

$$E(X^2)=0^2\times P(\overline{A})+1^2\times P(A)=P(A),$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=P(A)-[P(A)]^2=P(A)P(\overline{A}),$$

$$E(Y)=0\times P(\overline{B})+1\times P(B)=P(B),$$

$$E(Y^2)=0^2\times P(\overline{B})+1^2\times P(B)=P(B),$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=P(B)-[P(B)]^2=P(B)P(\overline{B}),$$

$$E(XY)=P(AB),$$

从而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=P(AB)-P(A)P(B),$$

故

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})}}.$$

（2） X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow P(AB)-P(A)P(B)=0$

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B) \Leftrightarrow A$与$B$相互独立.

4.5 综合提高训练

4.5.1 【2012（1，3）】设二维随机变量(X,Y)的分布律如表 4.13 所示.

（1）求$P\{X=2Y\}$；（2）$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

表 4.13 分布律

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

解 （1） $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$；

（2） $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)$，

X,Y 和 XY 的边缘分布律分别为

X	0	1	2
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	4
p	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

因此

$$E(XY)=\frac{2}{3},\quad E(X)=\frac{2}{3},\quad E(Y)=1,\quad D(Y)=\frac{2}{3},$$

故

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

4.5.2 【2011（1，3）】设随机变量 X与Y 的概率分布分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且$P\{X^2=Y^2\}=1$. 试求：

（1）(X,Y)的概率分布；（2）$Z=XY$ 的概率分布；（3）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解 （1）由$P\{X^2=Y^2\}=1$有$P\{X^2\neq Y^2\}=0$，即

$$P\{X=0,Y=-1\}=0,\quad P\{X=0,Y=1\}=0,$$
$$P\{X=1,Y=0\}=0,$$

因此(X,Y)的概率分布如表 4.14 所示.

表 4.14 概率分布

Y \ X	0	1	p_j
-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

（2） $Z=XY$ 的概率分布为

$Z=XY$	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3）
$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},$$

而

$$E(XY)=0,\quad E(X)=\frac{2}{3},\quad D(X)=\frac{2}{3},\quad E(Y)=0,\quad D(Y)=\frac{2}{3}$$

故

$$\rho_{XY}==\frac{0-\frac{2}{3}\times 0}{\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}}=0.$$

4.5.3　【2004（1，3）】设 A,B 为随机事件，已知 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生}.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

（1）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；（2）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；（3）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

解　（1）由题意可知

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},$$

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6},$$

因此

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

因此 (X,Y) 的分布律如表 4.15 所示.

表 4.15　分布律

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

（2）X,Y 和 XY 的分布律分别为

X	0	1
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

XY	0	1
p	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$

因此

$$E(XY)=\frac{1}{12},\quad E(X)=\frac{1}{4},\quad D(X)=\frac{3}{16},\quad E(Y)=\frac{1}{6},\quad D(Y)=\frac{5}{36},$$

故

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{5}{36}}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

（3）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布为

$Z=X^2+Y^2$	0	1	2
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

4.5.4　【2012（3）】设随机变量 X与Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布．记 $U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$．试求：（1）$V$ 的概率密度 $f_V(v)$；（2）$E(U+V)$．

解　（1）X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

因此 X, Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

V 的分布函数为

$$F_V(v)=1-[1-F_X(v)][1-F_Y(v)]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}$$

故 V 的概率密度

$$f_V(v)=\frac{\mathrm{d}F_V(v)}{\mathrm{d}v}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}$$

（2）由于

$$U=\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|),$$

$$V=\min\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|),$$

因此

$$U+V=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)+\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)=X+Y,$$

故

$$E(U+V)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2.$$

4.5.5　【2010（3）】箱中有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1、2、3 个，现从

箱中随机取出两个球．记 X 为取出红球的个数，Y 为取出白球的个数，试求：

（1）(X,Y) 的概率分布；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解　（1）依题意，X 的可能取值为 $0,1$，Y 的可能取值为 $0,1,2$，由古典概型有

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{2}{5},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15},\quad P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},\quad P\{X=1,Y=2\}=0 .$$

从而 (X,Y) 的概率分布如表 4.16 所示.

表 4.16　概率分布

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

（2）X,Y 和 XY 的分布律分别为

X	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1	2
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

XY	0	1	2
p	$\frac{13}{15}$	$\frac{28}{15}$	0

因此

$$E(XY)=\frac{2}{15},\quad E(X)=\frac{1}{3},\quad E(Y)=\frac{2}{3},$$

故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{4}{45}.$$

4.5.6　【2006（3）】设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，试求：

（1）$Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)$；（3）$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解　（1）Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}.$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0,\ f_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y};$$

当 $1\leqslant y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}\ .$$

当 $y\geqslant 4$ 时， $F_Y(y)=1,\ f_Y(y)=0$.

故 Y 的分布函数及概率密度分别为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}y^{-\frac{1}{2}}\ , & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{8}y^{-\frac{1}{2}}\ , & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ ,$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^2\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{6}\ ,$$

$$E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^3\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{7}{8}\ ,$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{3}\ .$$

（3） $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$

$$=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\ .$$

第 5 章　大数定律与中心极限定理

5.1　知 识 要 点

5.1.1　切比雪夫（Chebyshev）不等式

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在，则 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\{|X-E(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}，或 P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} > 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

5.1.2　依概率收敛

设 $\{X_n\}$ 是一个随机变量序列，a 是一个常数，若对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛**于 a，记为 $X_n \xrightarrow{P} a$.

5.1.3　常见的大数定律

（1）**切比雪夫大数定律**　设 $\{X_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，且存在常数 C，使 $D(X_i) \leqslant C \quad i=1,2,\cdots$，则 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

（2）**伯努利大数定律**　设 $\{X_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，都服从 $b(1,p)$ 分布，则 $\forall \varepsilon > 0$，有 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$.

（3）**辛钦大数定律**　设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_1)=\mu$，则 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

5.1.4　常见的中心极限定理

（1）**列维—林德伯格中心极限定理（独立同分布的中心极限定理）**　设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立同分布，且 $E(X_1)=\mu, D(X_1)=\sigma^2$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \Phi(x).$$

在上述条件下，当 n 很大时，$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从正态分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$，$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从正态分布 $N(0,1)$，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从正态分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

（2）棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理：设随机变量 Y_n 服从 $b(n, p)$ $(n = 0,1,2,\cdots,\ 0 < p < 1)$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\, \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

在上述条件下，当 n 很大时，Y_n 近似服从正态分布 $N(np, np(1-p))$，$\dfrac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从正态分布 $N(0,1)$.

5.2　典型例题分析

5.2.1　题型一：利用切比雪夫不等式估计事件的概率

例 5.2.1　已知正常男性成人的血液中，每一毫升血液中白细胞的平均数是 7300，均方差是 700．利用切比雪夫不等式估计每一毫升血液中白细胞数在 5200 与 9400 之间的概率．

解　设 X 表示正常男性成人血液中每一毫升血液中的白细胞数．则

$$E(X) = 7300,\quad D(X) = 700^2,$$

故

$$\begin{aligned} P\{5200 < X < 9400\} &= P\{-2100 < X - 7300 < 2100\} \\ &= P\{-2100 < X - E(X) < 2100\} \\ &= P\{|X - E(X)| < 2100\} \\ &\geqslant 1 - \frac{700^2}{2100^2} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

例 5.2.2　试利用切比雪夫不等式估计，1000 个新生婴儿中，男婴的数量在 400 与 600 之间的概率（假定男婴、女婴的出生率均为 0.5）．

解　设 X 表示 1000 个新生婴儿中男婴的数量，则 $X \sim b(1000, 0.5)$，且

$$E(X) = np = 500,\quad D(X) = np(1-p) = 250,$$

故

$$\begin{aligned} P\{400 < X < 600\} &= P\{-100 < X - 500 < 100\} \\ &= P\{-100 < X - E(X) < 100\} \\ &= P\{|X - E(X)| < 100\} \\ &\geqslant 1 - \frac{D(X)}{100^2} = 0.975. \end{aligned}$$

例 5.2.3　设随机变量 $X\sim U[-1,b]$，若由切比雪夫不等式有 $P\{|X-1|<\varepsilon\}>\frac{2}{3}$，则 $b=$________，$\varepsilon=$ ______.

解　由 $X\sim U[-1,b]$，有

$$E(X)=\frac{b-1}{2},\ D(X)=\frac{(b+1)^2}{12},$$

根据 $P\{|X-1|<\varepsilon\}>\frac{2}{3}$，有

$$\frac{b-1}{2}=1,\ \frac{\frac{(b+1)^2}{12}}{\varepsilon^2}=\frac{2}{3},$$

解得 $b=3,\ \varepsilon=\sqrt{2}$.

例 5.2.4　设随机变量 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(-1,4)$，且 $E(XY)=0$，则由切比雪夫不等式有 $P\{-8<X+2Y<6\}=$______.

解　由题意，有

$$\begin{aligned}E(X+2Y)&=E(X)+2E(Y)=1+2\times(-1)=-1,\\ D(X+2Y)&=D(X)+4D(Y)+4\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &=2+4\times4+4\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &=18+4[E(XY)-E(X)E(Y)]\\ &=18+4[0-1\times(-1)]=22.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}P\{-8<X+2Y<6\}&=P\{-7<X+2Y+1<7\}=P\{|X+2Y+1|<7\}\\ &=P\{|X+2Y-E(X+2Y)|<7\}\\ &\geqslant 1-\frac{D(X+2Y)}{7^2}=\frac{25}{49}.\end{aligned}$$

5.2.2　题型二：大数定律的应用

例 5.2.5　在一个罐子中，装有 10 个编号为 0～9 的大小相同的小球，从罐中有放回地抽取若干次，每次抽一个．设

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第 }k\text{ 次取到号码 }0,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots$$

问序列 $\{X_k\}$ 能否应用大数定律？

解　由题意

$$X_k\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.9 & 0.1\end{pmatrix},$$

因此

$$E(X_k)=0.1,\ D(X_k)=0.09,\quad k=1,2,\cdots$$

序列$\{X_k\}$独立同分布，且数学期望存在、方差有界，故可以应用大数定律，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.1\right| < \varepsilon\right\} = 1 .$$

例 5.2.6　随机变量序列$\{X_n\}$相互独立，且均在区间$(2,8)$内服从均匀分布，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$依概率收敛于________，$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于________.

解　由于

$$E(X_i)=5,\quad D(X_i)=\frac{(8-2)^2}{12}=3,$$

因此

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=28,\quad i=1,2,\cdots$$

故

$$E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=5,\quad E(Z_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=28 ,$$

由序列$\{X_n\}$相互独立，可知$\{X_n^2\}$也相互独立，故根据辛钦大数定律，当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$依概率收敛于 5，$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于 28 .

例 5.2.7　设随机变量序列$\{X_i\}$独立同分布，它们的数学期望均为0，求$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{n}{2}\right\}$.

解　由题设有

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0 ,$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<\frac{n}{2}\right\}&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-0\right|<\frac{n}{2}\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-0\right|<\frac{1}{2}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right|<\frac{1}{2}\right\}=1,\end{aligned}$$

由于$\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<\frac{n}{2}\right\}\subset\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{n}{2}\right\}$，因此

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<\frac{n}{2}\right\}\leqslant P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{n}{2}\right\},$$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{n}{2}\right\}=1$.

例 5.2.8　设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，它们的数学期望均为a、方差为σ^2，试证明$\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kX_k \xrightarrow{p} a$.

证　设 $Y_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kX_k$，则

$$E(Y_n)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kE(X_k)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka=a,$$

$$D(Y_n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2\sum_{k=1}^{n}k^2D(X_k)=\frac{4\sigma^2}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2<\frac{4\sigma^2}{n+1},$$

由切比雪夫不等式，有

$$P\{|Y_n-a|>\varepsilon\}\leqslant\frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}<\frac{4\sigma^2/(n+1)}{\varepsilon^2}\to 0,$$

因此$Y_n\xrightarrow{p}a$，　即$\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kX_k\xrightarrow{p}a$.

5.2.3　题型三：中心极限定理的应用

例 5.2.9　设随机变量序列$\{X_n\}$相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，则有（　　）.

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

解　因$E(X_i)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X_i)=\dfrac{1}{\lambda^2}$，$i=1,2,\cdots$，故

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n}{\lambda},\ D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n}{\lambda^2},$$

由独立同分布中心极限定理有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$$

因此选项 A 正确.

例 5.2.10　统计资料表明某种电子元件的寿命服从均值为 10 小时的指数分布，设各个电子元件的寿命相互独立.

（1）试求 100 只电子元件的寿命总和在 900～1200 小时的概率；

（2）多少只电子元件的寿命总和能以 95%的概率达到 960 小时?

解　（1）设第 i 件的寿命为 X_i 小时，$i=1,2,\cdots,100$

$$E(X_i)=10,\ D(X_i)=10^2，\ i=1,2,\cdots,100，$$

由独立同分布中心极限定理可知

$$P\{900\leqslant\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant1200\}=P\left\{\frac{900-100\times10}{\sqrt{100}\times10}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-100\times10}{\sqrt{100}\times10}\leqslant\frac{1200-100\times10}{\sqrt{100}\times10}\right\}$$

$$=P\left\{-1\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-100\times10}{\sqrt{100}\times10}\leqslant2\right\}\approx\Phi(2)-\Phi(-1)$$

$$=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.8185,$$

故 100 只电子元件的寿命总和在 900～1200 小时的概率为 0.8185.

（2）n 只电子元件的寿命总和能以 95%的概率达到 960 小时，

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant960\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\times10}{\sqrt{n}\times10}\geqslant\frac{960-n\times10}{\sqrt{n}\times10}\right\}$$

$$\approx1-\Phi\left(\frac{960-n\times10}{\sqrt{n}\times10}\right)=\Phi\left(\frac{10n-960}{\sqrt{n}\times10}\right)\geqslant0.95，$$

通过查表得 $\dfrac{10n-960}{10\sqrt{n}}\approx1.645$，$n\approx81.18$，故 82 只电子元件的寿命总和能以 95%的概率达到 960 小时.

例 5.2.11　某人打算选取 100 只股票做投资组合．设这 100 只股票的收益是相互独立的，且每只股票价格上涨的概率均为 0.2．求这 100 只股票中有 15～30 只价格上涨的概率．

解　设这 100 只股票中有 X 只股票价格上涨，$X\sim b(100,0.2)$，根据大数定律，

$$P\{15\leqslant X\leqslant30\}=P\left\{\frac{15-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times(1-0.2)}}\leqslant\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times(1-0.2)}}\leqslant\frac{30-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times(1-0.2)}}\right\}$$

$$=P\left\{-1.25\leqslant\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times(1-0.2)}}\leqslant2.5\right\}\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.25)=0.8862,$$

故这 100 只股票中有 15～30 只价格上涨的概率为 0.8862．

例 5.2.12　设 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$.

证明　设随机变量 X 服从参数为 n 的泊松分布，即

$$P\{X=k\}=\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

则 $E(X)=n,\ D(X)=n$，由于

$$P\{X\leqslant n\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}=a_n,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}P\{X\leqslant n\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-n}{\sqrt{n}}\leqslant 0\right\}=\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

例 5.2.13　设 $\{X_i\}$ 是相互独立的随机变量序列，都服从 $b(1,0.5)$ 分布，若存在常数 k 使得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}k(X_{2i}-X_{2i-1})}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t,$$

求常数 k 的值.

解　设 $Y_i=X_{2i}-X_{2i-1}$，因此 $\{Y_i\}$ 相互独立，且

$$E(Y_i)=E(X_{2i}-X_{2i-1})=0,$$

$$D(Y_i)=D(X_{2i}-X_{2i-1})=D(X_{2i})+D(X_{2i-1})=\frac{1}{2},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i-0}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}k(X_{2i}-X_{2i-1})}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}kY_i}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{\frac{\sqrt{n}}{k}}\leqslant x\right\},$$

故当 $k=\sqrt{2}$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}k(X_{2i}-X_{2i-1})}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t.$$

5.3　深化训练

5.3.1　填空题

（1）设 X 为连续型随机变量，则对任意常数 C，下列选项一定成立的是（　　）.

（A）$P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}=\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$　　（B）$P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\geqslant\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

（C）$P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$　　（D）$P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

（2）设随机变量 X 满足 $E(X^2)=1.1, D(X)=0.1$，则下列结论一定成立的是（　　）.

（A）$P\{-1<X<1\}\geqslant 0.9$　　（B）$P\{0<X<2\}\geqslant 0.9$

（C）$P\{X+1\geqslant 2\}\leqslant 0.9$　　（D）$P\{|X|\geqslant 1\}\leqslant 0.1$

（3）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{1000}$ 独立同分布，且 $X_1\sim b(1,p)$，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）$\dfrac{1}{1000}\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k\approx p$

（B）$\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k\sim b(1000,p)$

（C）$P\{a<\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k<b\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)$

（D）$P\{a<\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k<b\}\approx\Phi\left(\dfrac{b-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)$

5.3.2　单项选择题

（1）设随机变量 X 满足 $D(X)=2$，利用切比雪夫不等式估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$ ________.

（2）设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 0.5.利用切比雪夫不等式估计 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}\leqslant$ ________.

（3）随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且均服从参数为 λ 的泊松分布，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于__________，$Z_n=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 依概率收敛于________.

（4）随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且分布律均为 $\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0.8 & 0.2\end{pmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}<1\right\}=$ ________.

5.3.3　某电网有 1 万盏路灯，晚上每盏灯开的概率为 0.7，利用切比雪夫不等式估计同时开的灯数在 6800～7200 之间的概率.

5.3.4　假设某一年龄段女孩的平均体重为 13kg，标准差为 0.8kg，现从该年龄段女孩中随机抽取 5 名女孩，测其体重，估计她们的平均体重在 12kg 到 14kg 之间的概率.

5.3.5　设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，它们的数学期望均为 0、方差为 σ^2，试证明当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{p}\sigma^2$.

5.3.6　设某保险公司的老年人寿险每年有 10 000 人参加，每人每年付 40 元保险费，若参保人员在参保期间去世，死者家属可向保险公司领取 2000 元赔偿费. 若在一年内老人死亡的概率为 0.017，求：

（1）保险公司没有利润的概率为多大；

（2）保险公司一年的利润大于 60 000 元的概率.

5.3.7　某药厂声称，该厂生产的某种药品对于医治某种血液病的治愈率为 0.8. 医院提出一个方案，从服用此药品的病人中任意抽查 100 人，如果病愈人数多于 75 人，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言.

（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？

（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

5.3.8　假定某种型号的螺丝钉的重量是随机的，其平均重量为 50 克，标准差为 5 克.若用最大载重量为5千克的袋子装运，试利用中心极限定理说明每袋最多可以装多少个螺丝钉，才能保障不超重的概率大于 0.977.

5.3.9　质检员逐个检查某种产品. 每次需用时 10 秒检查一个，但也可能有的产品需要重复检查一次再用去 10 秒. 假设每个产品需要重复检查的概率为 0.5. 求在 8 小时内质检员检查的产品多于 1900 个的概率.

5.3.10　现有一批种子，其中良种占$\frac{1}{6}$，现从中任选 6000 粒，求这些种子中良种所占比例与$\frac{1}{6}$比较，上下不超过 1%的概率。（1）用切比雪夫不等式估计；（2）用中心极限定理计算.

5.3.11　已知某学校学生上课的出勤率是 97%，现全校共有 5000 名学生上课，试求出勤人数少于 4880 人的概率.

5.3.12　某职员每天乘公交车上班. 如果他每天用于等车的时间服从均值为 12 分钟的指数分布，计算他在 303 个工作日中用于上班的等车时间之和大于 24 小时的概率.

5.3.13　证明：设随机变量序列$\{X_i\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=0$，则对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

5.4　深化训练详解

5.3.1　填空题

（1）C；

（2）B；**提示**　由于

$$[E(X)]^2=E(X^2)-D(X)=1.1-0.1=1,$$

因此$E(X)=1$，由切比雪夫不等式有

$$P\{|X-1|<1\}\geqslant 1-\frac{0.1}{1^2}=0.9,$$

即$P\{0<X<2\}\geqslant 0.9$，故选项 B 正确.

（3）C；**提示**　由伯努利大数定律可知选项 A 正确；根据n重伯努利试验的定义可知选项

B 正确，根据独立同分布中心极限定理可知选项 D 正确，故答案选 C.

5.3.2　单项选择题

（1）$\dfrac{1}{2}$；

（2）$\dfrac{1}{12}$；**提示**　由于 $E(X-Y)=0$，

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=1+4-2\times0.5\times1\times2=3,$$

利用切比雪夫不等式得

$$P\{|X-Y|\geqslant6\}=P\{|(X-Y)-E(X-Y)|\geqslant6\}\leqslant\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{1}{12}.$$

（3）$\lambda+\lambda^2$，λ；**提示**　$E(X_i)=\lambda, D(X_i)=\lambda$,

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\lambda+\lambda^2,\quad i=1,2,\cdots,$$

$$E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^{\ 2})=\lambda+\lambda^2,\ E(Z_n)=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\lambda,$$

故当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$ 依概率收敛于 $\lambda+\lambda^2$，$Z_n=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 依概率收敛于 λ.

（4）$\Phi(2)$；**提示**　由于

$$E(X_i)=0,\quad D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X)]^2=4,\quad i=1,2,\cdots,$$

故

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0,\ D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=4n,$$

由独立同分布中心极限定理有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}<1\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-0}{\sqrt{4n}}<\frac{1}{2}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{2}\right).$$

5.3.3　设 X 为 1 万盏路灯中同时开的灯数，则 $X\sim b(10000,0.7)$，且

$$E(X)=np=10000\times0.7=7000,$$
$$D(X)=np(1-p)=10000\times0.7\times(1-0.7)=2100,$$

故

$$\begin{aligned}P\{6800<X<7200\}&=P\{6800-7000<X-7000<7200-7000\}\\&=P\{-200<X-E(X)<200\}=P\{|X-E(X)|<200\}\end{aligned}$$

在切比雪夫不等式中，取 $\varepsilon=200$，可得

$$P\{6800<X<7200\}=P\{|X-E(X)|\leqslant200\}>1-\frac{D(X)}{200^2}=1-\frac{2100}{40000}=0.95.$$

5.3.4　设 X_i 为第 i 名女孩的体重，显然 $X_1,\cdots,X_5$ 相互独立同分布，由于

$$E(X_i)=13,\quad D(X_i)=0.8^2=0.64,$$

$$E(\overline{X})=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}E(X_i)=13,\quad D(\overline{X})=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5}D(X_i)=0.128,$$

应用切比雪夫不等式，有

$$P\{12<\overline{X}<14\}=P\{|\overline{X}-13|<1\}\geqslant 1-\frac{0.128}{1^2}=0.872.$$

5.3.5　由 $\{X_n\}$ 独立同分布有 $\{X_n^2\}$ 独立同分布，且

$$E(X_i^{\,2})=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2,\quad i=1,2,\cdots,$$

因此由辛钦大数定律，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\xrightarrow{p}\sigma^2$.

5.3.6　（1）设 X 为在一年中参保者的死亡人数，则 $X\sim b(10000,0.017)$，由于

$$\begin{aligned}P\{2000X>40\times 10000\}&=P\{X>200\}\\&=P\left\{\frac{X-10000\times 0.017}{\sqrt{10000\times 0.017\times(1-0.017)}}>\frac{200-10000\times 0.017}{\sqrt{10000\times 0.017\times(1-0.017)}}\right\}\\&=P\left\{\frac{X-10000\times 0.017}{\sqrt{10000\times 0.017\times(1-0.017)}}>2.3207\right\}\approx 1-\Phi(2.3207)=0.0102,\end{aligned}$$

故保险公司没有利润的概率为 0.0102.

（2）$P\{40\times 10000-2000X\geqslant 60000\}=P\{X\leqslant 170\}$

$$\begin{aligned}&=P\left\{\frac{X-10000\times 0.017}{\sqrt{10000\times 0.017\times(1-0.017)}}\leqslant\frac{170-10000\times 0.017}{\sqrt{100000\times 0.017\times(1-0.0176)}}\right\}\\&=P\left\{\frac{X-10000\times 0.017}{\sqrt{10000\times 0.017\times(1-0.017)}}\leqslant 0\right\}\approx\Phi(0)=0.5,\end{aligned}$$

因此保险公司一年的利润不少于 60 000 元的概率为 0.5 .

5.3.7　设 $X_i=\begin{cases}1, & 第 i 人治愈,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　$i=1,2,\cdots,100$.　令 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$.

（1）由题意，$X\sim b(100,0.8)$，从而

$$\begin{aligned}P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i>75\right\}&=1-P\{X\leqslant 75\}\approx 1-\Phi\left(\frac{75-100\times 0.8}{\sqrt{100\times 0.8\times 0.2}}\right)\\&=1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944.\end{aligned}$$

故接受这一断言的概率是 0.894 4.

（2）由题意，$X\sim b(100,0.7)$，从而

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 75\right\} = 1 - P\{X \leqslant 75\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 100\times 0.7}{\sqrt{100\times 0.7\times 0.3}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right) = 1 - \Phi(1.09) = 0.1379.$$

故接受这一断言的概率是 0.137 9.

5.3.8　设每袋最多可以装 n 个螺丝钉，$X_i, i = 1,2,\cdots,n$ 是 i 个螺丝钉的重量，由条件知，总重量为 $\sum_{i=1}^{n} X_i$，且

$$E(X_i) = 50, \quad \sqrt{D(X_i)} = 5,$$

因此

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant 5000\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 50n}{\sqrt{n}\cdot 5} \leqslant \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977,$$

查表可得，$\dfrac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$，解出 $n < 98.0199$，即最多可装 98 个螺丝钉.

5.3.9　设 X_k 为检查第 k 个产品所需时间，

$$X_k = \begin{cases} 10, & \text{第}k\text{个产品不需要重复检查}, \\ 20, & \text{第}k\text{个产品需要重复检查}. \end{cases} \qquad k = 1,2,\cdots,1900.$$

因此 X_k 的分布律为

X_k	10	20
p	0.5	0.5

且 $E(X_k) = 15,\ \ D(X_k) = 25$，故

$$P\left\{\sum_{k=1}^{1900} X_k \leqslant 8\times 3600\right\} = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{1900} X_k - 1900\times 15}{\sqrt{1900}\times 15} \leqslant \frac{28800 - 1900\times 15}{\sqrt{1900}\times 15}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{1900} X_k - 1900\times 15}{\sqrt{1200}\times 15} \leqslant \frac{6}{\sqrt{19}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{19}}\right) = 0.9162.$$

5.3.10　（1）设 X 表示任选的 6000 粒种子中良种的粒数，则 $X \sim b\left(6000, \dfrac{1}{6}\right)$，且

$$E(X) = 1000, D(X) = \frac{5000}{6},$$

从而

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right\}=P\{|X-1000|<60\}>1-\frac{\frac{5000}{6}}{60^2}=0.7685\,.$$

（2）$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right\}=P\{|X-1000|<60\}=P\{940<X<1060\}$

$$=P\left\{\frac{940-1000}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}<\frac{X-1000}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}<\frac{1060-1000}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}\right\}$$

$$=P\left\{-2.078<\frac{X-1000}{\sqrt{6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}<2.078\right\}$$

$$\approx\Phi(2.078)-\Phi(-2.078)=0.96\,.$$

5.3.11　设 X_i 表示第 i 个学生是否出勤，若第 i 个学生出勤，则记 $X_i=1$，否则 $X_i=0$，$i=1,2,\cdots,5000$，则 $X_i\sim b(1,p)$，且

$$E(X_i)=p=0.97\,,\quad D(X_i)=p(1-p)=0.0291\,.$$

设 X 是 5000 个相互独立且服从（0-1）分布的随机变量 X_i 之和，即 $X=\sum_{i=1}^{5000}X_i$，由题设知

$$P\{X<4880\}=P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{4880-5000\times0.97}{\sqrt{5000\times0.0291}}\right\}$$

$$=P\{Z<2.487\}=\Phi(2.487)=0.9936.$$

5.3.12　设 X_i 表示第 i 个工作日的等车时间，则 $T=\sum_{i=1}^{303}X_i$ 表示 $n=303$ 个工作日的等车时间之和，且 $EX_i=\frac{1}{12}$，$DX_i=\frac{1}{12^2}$,由中心极限定理可知

$$P\{T>24\}=P\left\{\frac{T-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}>\frac{24-303\times\frac{1}{12}}{\sqrt{303\times\frac{1}{12^2}}}\right\}$$

$$=\Phi(0.86)=0.8051.$$

5.3.13　由题意，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}$$

$$\geqslant1-\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}\,,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1 .$$

5.5　综合提高训练

例 5.5.1　独立地测量一个物理量，每次测量产生的随机误差都服从 $(-0.5, 0.5)$ 上的均匀分布.

（1）测量 108 次，问总误差大于 10 的概率是多少？

（2）要使总误差和的绝对值小于 5 的概率不小于 0.95，最多进行多少次测量.

解　（1）设第 i 次测量的误差为 X_i，有 $X_i \sim U(-0.5, 0.5)$，且

$$E(X_i) = 0,\ D(X_i) = \frac{1}{12}\ i = 1, 2, \cdots, 108 .$$

因此

$$P\left\{\sum_{i=1}^{108} X_i > 10\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{108} X_i - 108\times 0}{\sqrt{108\times\frac{1}{12}}} > \frac{10 - 108\times 0}{\sqrt{108\times\frac{1}{12}}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{108} X_i - 108\times 0}{\sqrt{108\times\frac{1}{12}}} > 3.33\right\} \approx 1 - \Phi(3.33) \approx 0 .$$

故总误差大于 10 的概率是 0.

（2）设应该进行 n 次测量，则

$$P\left\{|\sum_{i=1}^{n} X_i| \leqslant 5\right\} = P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\times 0}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right| \leqslant \frac{5}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right\}$$

$$= P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\times 0}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right| \leqslant \frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \geqslant 0.95 ,$$

即

$$\Phi\left(\frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0.95,\ \frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{n}} \geqslant 1.65,\quad n \leqslant 110.19 ,$$

故应该测量 110 次.

例5.5.2　一个食品店有三种小包装食盐出售，由于售出哪一种食盐是随机的，因而售出一袋食盐的价格是一个随机变量，它取 1 元、1.2 元、1.5 元三个值的概率分别为 0.3，0.2，0.5，若售出 300 袋食盐，试求：

（1）收入至少为 400 元的概率；（2）售出价格为 1.2 元的食盐多于 60 袋的概率.

解　（1）设售出的第 i 袋食盐的价格为 X_i 元，$i=1,2,\cdots,300$.则

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix},$$

故

$$E(X_i)=1.29,\ D(X_i)=0.0489,\quad i=1,2,\cdots,300.$$

根据中心极限定理有

$$（1）\ P\left\{\sum_{i=1}^{300}X_i \geqslant 400\right\} = P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{300}X_i - 300\times 1.29}{\sqrt{300\times 0.0489}} \geqslant \frac{400-300\times 1.29}{\sqrt{300\times 0.0489}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{300}X_i - 300\times 1.29}{\sqrt{300\times 0.0489}} \geqslant 3.02\right\} \approx 1-\Phi(3.02)=0.0003.$$

故收入至少为 400 元的概率为 0.000 3.

（2）设售出价格为 1.2 元的食盐 Y 袋，$Y\sim b(300,0.2)$，根据中心极限定理，

$$P\{Y\geqslant 60\} = P\left\{\frac{Y-300\times 0.2}{\sqrt{300\times 0.2\times(1-0.2)}} \geqslant \frac{60-300\times 0.2}{\sqrt{300\times 0.2\times(1-0.2)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{Y-300\times 0.2}{\sqrt{300\times 0.2\times(1-0.2)}} \geqslant 0\right\} \approx 1-\Phi(0)=0.5,$$

故售出价格为 1.2 元的食盐多于 60 袋的概率为 0.5.

第 6 章　数理统计的基本概念

6.1　知 识 要 点

6.1.1　总体与样本

研究对象的全体称为**总体**，总体中的每个成员（或元素）称为**个体**；一个总体对应一个随机变量 X ， X 的分布函数和数字特征也称为总体的分布函数和数字特征. 从总体中抽取若干个成员，这些成员称为总体的一个**样本**；成员个数称为**样本容量**. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，若样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且它们具有相同的分布函数 $F(x)$，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的**简单随机样本**，简称**样本**.

6.1.2　统计量与抽样分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，其观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，若 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不含有任何未知参数，则 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**统计量**，统计量的分布称为**抽样分布**.

6.1.3　一些常用的统计量

（1）样本均值：$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

（2）样本方差：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$；

（3）样本标准差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$；

（4）样本 k 阶原点矩：$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$，$k=1,2,\ldots$；

（5）样本 k 阶中心矩：$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$，$k=2,3,\cdots$.

6.1.4　经验分布函数

设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，经验分布函数 $F_n(x)$ 定义为

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i\leqslant x)\,,\quad -\infty<x<+\infty\,.$$

若已知样本的观测值，则可以很容易地得到经验分布函数 $F_n(x)$ 的**观测值**.例如，设

$x_1, x_2 \cdots, x_n$ 是总体 X 的一个样本值，从小到大排列后，记为 $x_{(1)},\cdots,x_{(n)}$，则经验分布函数 $F_n(x)$ 的**观测值**为

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)},\\ \dfrac{k}{n}, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)},\ k=1,2,\cdots,n-1,\\ 1, & x\geqslant x_{(n)}.\end{cases}$$

格里汶科定理：当 $n\to\infty$ 时，$F_n(x)$ 以概率 1 一致收敛于分布函数 $F(x)$，即

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|=0\right\}=1 .$$

*6.1.5　顺序统计量

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，记

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

则 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 分别称为样本的**最小顺序统计量**和**最大顺序统计量**．设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的分布函数分别为

$$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n,\quad F_n(x)=F^n(x) .$$

若总体 X 的密度函数为 $f(x)$，则 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的概率密度函数分别为

$$f_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x),\quad f_n(x)=nF^{n-1}(x)f(x) .$$

6.1.6　χ^2 分布

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，称 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 **χ^2 分布**，记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$．$\chi^2(n)$ 分布的密度函数 $f(y)$ 的图像如图 6.1 所示．

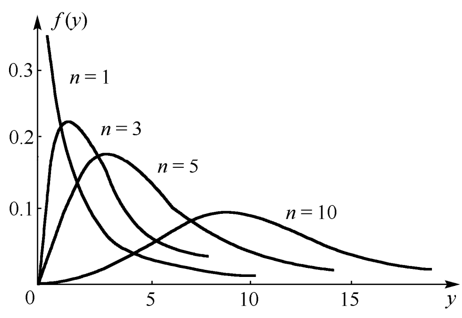


图 6.1　密度函数

χ^2 分布的性质：

（1）若 $\chi_1^2\sim\chi^2(m)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n)$，且 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立，则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(m+n)$；

（2）若 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则 $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$.

6.1.7　t 分布

设 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，称 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 **t 分布**，记为 $t\sim t(n)$． $t(n)$ 分布的密度函数 $h(t)$ 如图 6.2 所示.

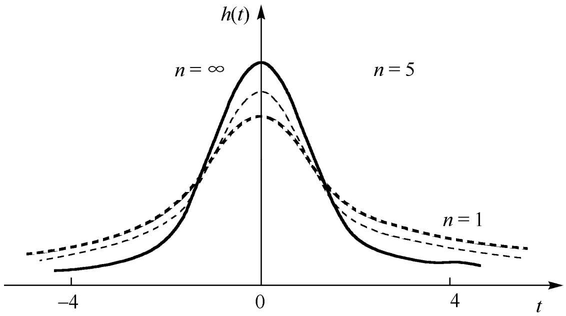


图 6.2　密度函数

t 分布的性质：

（1）t 分布的概率密度曲线 $h(t)$ 的图像关于直线 $t=0$ 对称，即 $h(t)$ 为偶函数；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$，故当 n 足够大时，t 分布近似于标准正态分布 $N(0,1)$；

（3）$E[t(n)]=0$，$D[t(n)]=\dfrac{n}{n-2}(n>2)$.

6.1.8　F 分布

设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，称 $F=\dfrac{X/m}{Y/n}$ 服从自由度为 (m,n) 的 **F 分布**，记为 $F\sim F(m,n)$． $F(m,n)$ 分布的密度函数 $f(y)$ 如图 6.3 所示.

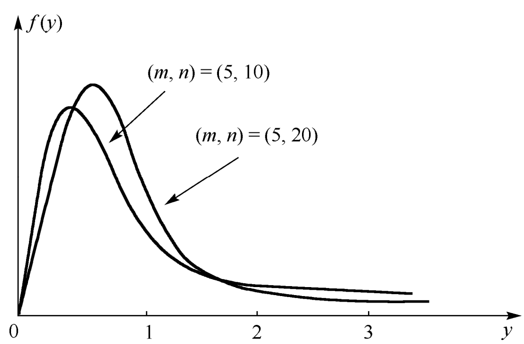


图 6.3　密度函数

F 分布的性质：

（1）若 $F\sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$；

（2）若 $T\sim t(n)$，则 $T^2\sim F(1,n)$.

6.1.9　上α分位点

我们曾在 2.1.6 节给出了连续型随机变量分布的上α分位点的概念，这里我们给出几个具体连续型分布的上α分位点.

若$X\sim N(0,1)$，z_α满足

$$P\{X>z_\alpha\}=1-\Phi(z_\alpha)=\int_{z_\alpha}^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x，$$

则称z_α为$N(0,1)$的上α分位点.

类似地，可以定义$\chi^2(n)$分布的上α分位点$\chi^2_\alpha(n)$，t分布的上α分位点$t_\alpha(n)$，$F(m,n)$分布的上α分位点$F_\alpha(m,n)$等．可以证明

$$z_{1-\alpha}=-z_\alpha，\quad t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)，\quad F_{1-\alpha}(n,m)=\frac{1}{F_\alpha(m,n)}.$$

6.1.10　正态总体的样本均值与样本方差的分布

性质 1（单总体情形）：设$X_1,X_2\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$ X的一个样本，$\overline{X}$和$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$分别是样本均值和样本方差，则有

（1）$E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$，且$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；

（2）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；

（3）$\overline{X}$与S^2相互独立，且$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

性质 2（双总体情形）：设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$X$与$Y$独立，$X_1,X_2,\cdots,X_m$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$分别为来自$X$与$Y$的样本，$\overline{X},\ \overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值，$S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$分别是这两个样本的样本方差，则有

（1）$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$；

（2）$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$；

（3）当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，则有

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)，$$

其中$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{(m+n-2)}}$.

6.1.11　几个常用的结论

（1）记总体 X 的 k 阶矩 $E(X^k)=\mu_k$， g 为连续函数，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}\mu_k,\ k=1,2,\dots,$$

$$g(A_1,A_2,\cdots A_k)\xrightarrow{P}g(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_k),\ k=1,2,\dots.$$

（2）设总体 X 的均值为 μ，方差为 σ^2， $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 以及 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 分别是样本均值、样本方差和修正的样本方差，则有

$$E(\overline{X})=\mu,\quad D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(S_n^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2,\quad E(S^2)=\sigma^2.$$

6.2　典型例题分析

6.2.1　题型一：统计量与抽样分布问题

例 6.2.1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ,σ^2 为未知参数，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则下列表达式为统计量的是（　　）.

（A） $T_1=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$　　（B） $T_2=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$

（C） $T_3=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　　（D） $T_4=\overline{X}-E(\overline{X})$

解　注意到 $E(\overline{X})=\mu$，即 T_2,T_3,T_4 中都含有未知参数，因此 T_2,T_3,T_4 均不是统计量．故答案选 A.

例 6.2.2　【2002（3）】设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则（　　）.

（A） $X+Y$ 服从正态分布　　（B） X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

（C） X^2 和 Y^2 服从 χ^2 分布　　（D） X^2/Y^2 服从 F 分布

解　答案选 C．由于随机变量 X 和 Y 不一定相互独立，因此选项 B 和 D 错误；选项 A 具有一定的迷惑性，需要注意的是，有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布．这里 X 和 Y 不一定相互独立，因此 $X+Y$ 不一定服从正态分布．例如取 $Y=-X$，则 $P\{X+Y=0\}=1$，此时 $X+Y$ 服从退化分布.

例 6.2.3　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，且 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，试讨论统计量 $T=\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ 的分布.

解　由题意，$a\overline{X}+bX_{n+1}$ 服从期望为 $(a+b)\mu$，方差为 $\left(\dfrac{a^2}{n}+b^2\right)\sigma^2$ 的正态分布．取 $a=-1$，

$b=1$，则 $-\overline{X}+X_{n+1}\sim N\left(0,\dfrac{n}{n+1}\sigma^2\right)$，即有

$$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim N(0,1)$$

而

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

且 $\overline{X}$, X_{n+1} 均与 S^2 相互独立，因此 $\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ 与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立，故

$$T=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}\sim t(n-1)$$

例 6.2.4　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的一个样本，且 $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，试讨论统计量 $n(\bar{X})^2+(n-1)S^2$ 的分布.

解　由于 $\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，因此 $n(\overline{X})^2\sim\chi^2(1)$. 又因为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，因此 $n(\overline{X})^2$ 与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立，由 χ^2 分布的可加性知

$$n(\bar{X})^2+(n-1)S^2\sim\chi^2(n).$$

例 6.2.5　设 $X_1,X_2,\cdots,X_m,X_{m+1},\cdots,X_{m+n}$ 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个容量为 $m+n$ 的样本，试讨论统计量 $\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_m^2}{X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_{m+n}^2}$ 的分布.

解　由于 $X_1,X_2,\cdots,X_m,X_{m+1},\cdots,X_{m+n}$ 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，因此

$$\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1),\ i=1,2,3,\cdots,m+n.$$

又因为 $X_1,X_2,\cdots,X_m,X_{m+1},\cdots,X_{m+n}$ 相互独立，故

$$\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_m^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m),\quad\frac{X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_{m+n}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),$$

且 $\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_m^2}{\sigma^2}$ 与 $\dfrac{X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_{m+n}^2}{\sigma^2}$ 相互独立．根据 F 分布的定义，

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_m^2}{X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_{m+n}^2}=\frac{\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_m^2}{m\sigma^2}}{\dfrac{X_{m+1}^2+X_{m+2}^2+\cdots+X_{m+n}^2}{n\sigma^2}}\sim F(m,n).$$

6.2.2　题型二：概率的计算问题

例 6.2.6　设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 为来自总体 X 的一个样本，且 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，试求：（1）$P\{X_{(5)}>0.5\}$；（2）$P\{X_{(1)}>0.5\}$.

解　（1）
$$\begin{aligned}P\{X_{(5)}>0.5\}&=1-P\{X_{(5)}\leqslant 0.5\}\\&=1-P\{X_1\leqslant 0.5\}P\{X_2\leqslant 0.5\}\cdots P\{X_5\leqslant 0.5\}\\&=1-(P\{X\leqslant 0.5\})^5=1-\left(\int_0^{0.5}1\mathrm{d}x\right)^5\approx 1-0.0313\approx 0.9687.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}P\{X_{(1)}>0.5\}&=P(X_1>0.5)P(X_2>0.5)\cdots P(X_5>0.5)\\&=(P\{X>0.5\})^5=[1-P\{X\leqslant 0.5\}]^5\approx 0.0313.\end{aligned}$$

例 6.2.7　现从总体 $N(10,4)$ 中分别抽取样本容量为 16 和 20 的两个样本，试求两样本均值差的绝对值大于 0.5 的概率.

解　令 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别表示容量为 16 和 20 的两个样本的样本均值，则
$$\overline{X}\sim N\left(10,\frac{4}{16}\right),\quad \overline{Y}\sim N\left(10,\frac{4}{20}\right).$$
从而 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\frac{4}{16}+\frac{4}{20}\right)$，即 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,0.45)$．因此
$$\begin{aligned}P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>0.5\}&=P\left\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{0.45}}>\frac{0.5}{\sqrt{0.45}}\right\}=2-2\Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{0.45}}\right)\\&\approx 2-2\Phi(0.745)\approx 0.453.\end{aligned}$$

6.2.3　题型三：随机变量的数字特征问题

例 6.2.8【2003（3）】设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别为来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则 $E\left[\frac{1}{m+n-2}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right)\right]=$______________.

解　由于
$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1),\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-\overline{Y})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$
因此
$$E\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right)=m-1,\quad E\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-\overline{Y})^2}{\sigma^2}\right)=n-1.$$
从而
$$E\left(\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2\right)=(m-1)\sigma^2,\quad E\left(\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right)=(n-1)\sigma^2,$$

故

$$E\left[\frac{1}{m+n-2}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right)\right]=\sigma^2 .$$

例 6.2.9　设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，经验分布函数为 $F_n(x)$，试证明

$$E[F_n(x)]=F(x)，\quad D[F_n(x)]=\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)] .$$

证　记 $Y_i=I(X_i\leqslant x)$，由于

$$E(Y_i)=1\times P\{X_i\leqslant x\}+0\times P\{X_i>x\}=F(x) ,$$

因此

$$E[F_n(x)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(x)=F(x) .$$

又因为

$$E(Y_i^2)=1^2\times P\{X_i\leqslant x\}+0^2\times P\{X_i>x\}=F(x) ,$$

$$D(Y_i)=E(Y_i^2)-[E(Y_i)]^2=F(x)-F^2(x)=F(x)[1-F(x)] ,$$

因此

$$D[F_n(x)]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(Y_i)=\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)] .$$

6.2.4　题型四：常数的求解问题

例 6.2.10　设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $X\sim N(1,4)$ 的样本，已知 $a(X_1-X_2)^2+b(X_3-2X_4+c)^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，其中 a,b 均为不等于 0 的常数，试求常数 a,b,c 以及自由度 n 的值.

解　由于 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且服从正态分布 $N(1,4)$，因此 X_1-X_2 和 X_3-2X_4+c 服从正态分布．其期望和方差分别为

$$E(X_1-X_2)=0，\quad D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=8 ,$$

$$E(X_3-2X_4+c)=c-1，\quad D(X_3-2X_4+c)=D(X_3)+4D(X_4)=20 ,$$

故

$$\frac{X_1-X_2}{2\sqrt{2}}\sim N(0,1) ,\qquad \frac{X_3-2X_4+c}{2\sqrt{5}}\sim N(c-1,1) .$$

又因为 $\dfrac{X_1-X_2}{2\sqrt{2}}$ 和 $\dfrac{X_3-2X_4+c}{2\sqrt{5}}$ 相互独立，根据 χ^2 分布的定义可知 $c=1$，且

$$\left(\frac{X_1-X_2}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_3-2X_4+c}{2\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{8}(X_1-X_2)^2+\frac{1}{20}(X_3-2X_4+1)^2\sim\chi^2(2) .$$

而由题设，$a(X_1-X_2)^2+b(X_3-2X_4+c)^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布，因此 $a=\dfrac{1}{8}$，$b=\dfrac{1}{20}$，c=1，$n=2$.

6.2.5　题型五：经验分布函数的求解

例 6.2.11　设 $4,2,8,6,8,4,8,9$ 为来自总体 X 的样本观测值，试求 X 的经验分布函数.

解　将各个观测值从小到大排列，得 $2,4,4,6,8,8,8,9$，因此经验分布函数为

$$F_8(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ \dfrac{1}{8}, & 2\leqslant x<4,\\ \dfrac{3}{8}, & 4\leqslant x<6,\\ \dfrac{1}{2}, & 6\leqslant x<8,\\ \dfrac{7}{8}, & 8\leqslant x<9,\\ 1, & x\geqslant 9,\end{cases}$$

6.2.6　题型六：样本容量问题

例 6.2.12　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,4)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，若已知 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.5\}\geqslant 0.95$，试求最小的样本容量 n.

解　由于 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其中 $\sigma=2$,因此

$$P\{|\overline{X}-\mu|<0.5\}=P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<\frac{0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(-\frac{0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-1\geqslant 0.95.$$

于是 $\Phi\left(\dfrac{0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\geqslant 0.975$，经查表得 $\dfrac{0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant 1.96$，即 $n\geqslant 61.46$，故最小的样本容量 n 应取 65.

6.3　深 化 训 练

6.3.1　填空题

（1）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态分布 $N(\mu,0.3^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，为使 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}\geqslant 0.95$，则样本容量 n 应至少为________.

（2）设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 为来自总体 $X\sim N(1,4)$ 的样本，记 $Y=a(X_1-3X_2+b)^2+c(X_3+X_4-2X_5)^2$，则当 $a=$________，$b=$________，$c=$________时，Y 服从自由度为________的 χ^2 分布.

（3）【2001（3）】设 $X\sim N(0,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从________分布，参数为________.

（4）【2006（3）】设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$________.

6.3.2　单项选择题

（1）【2013（1）】设 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定 α $(0<\alpha<0.5)$，常数 $C>0$ 满足 $P\{X>C\}=\alpha$，则 $P\{Y>C^2\}=$（　）.

（A）α　　（B）$1-\alpha$　　（C）2α　　（D）$1-2\alpha$

（2）【2005（1）】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\geqslant 2)$ 为来自 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列结论正确的是（　）

（A）$n\overline{X}\sim N(0,1)$　　（B）$nS^2\sim \chi^2(n)$

（C）$\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　（D）$\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

（3）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，对于任意的 $\varepsilon>0$，下列结论正确的是（　）.

（A）$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}=P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}$　　（B）$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}>P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}$

（C）$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}<P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}$　　（D）以上结论都不对

（4）【2003（1）】设随机变量 $X\sim t(n)$，其中 $n>1$，若 $Y=\dfrac{1}{X^2}$，则下列结论正确的是（　）.

（A）$Y\sim \chi^2(n)$　　（B）$Y\sim \chi^2(n-1)$　　（C）$Y\sim F(n,1)$　　（D）$Y\sim F(1,n)$

（5）若随机变量 $X_1\sim \chi^2(n_1)$，$X_2\sim \chi^2(n_2)$，且 X_1 和 X_2 相互独立，则下列结论正确的是（　）.

（A）$D(X_1+X_2)=n_1+n_2$　　（B）$D(X_1+X_2)=2(n_1+n_2)$

（C）$D(X_1+X_2)=n_1^2+n_2^2$　　（D）$D(X_1+X_2)=2(n_1^2+n_2^2)$

（6）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(2,1)$ 的一个样本，且 $a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-b\right)^2$ 服从自 $\chi^2(k)$ 分布，则 a，b 和 k 的值分别为（　）.

（A）$a=\dfrac{1}{\sqrt{n}},b=2n,k=1$　　（B）$a=\dfrac{1}{n},b=2n,k=n$

（C）$a=\dfrac{1}{n},b=n,k=1$　　（D）$a=\dfrac{1}{n},b=2n,k=1$

6.3.3　设 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$Y=\frac{X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{2n-1}^2}{X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{2n}^2},$$

试求统计量 Y 的抽样分布.

6.3.4　【1999】设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),\quad S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,$$

试证明 $\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(2)$.

6.3.5　设 X_1,X_2 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，试求 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 的分布.

6.3.6　设随机变量 $X\sim F(n,n)$，试证明 $P\{X<1\}=0.5$.

6.3.7　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记 $Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$，试求 $E(Y)$ 和 $D(Y)$.

6.4　深化训练详解

6.3.1　填空题

（1）35；

（2）$\dfrac{1}{40}$，2，$\dfrac{1}{24}$，2；

（3）F，$(10,5)$；

（4）2；**提示**　由于样本方差 S^2 是总体方差的无偏估计，因此 $E(S^2)=D(X)$. 而

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^{3-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\varGamma(3)=2!=2,$$

因此

$$E(S^2)=D(X)=E(X^2)=2.$$

6.3.2　单项选择题

（1）C；**提示**　由 $X\sim t(n),Y\sim F(1,n)$，根据 t 分布与 F 的关系可知

$$P\{Y>C^2\}=P\{X^2>C^2\}=P\{X>C\}+P\{X<-C\}=2\alpha,$$

故选项 C 正确.

（2）D；**提示**　由于 $\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，因此 $n\overline{X}\sim N(0,n)$，故选项 A 错误；由于 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，因此选项 B 错误；由于

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{(n-1)}}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$$

因此选项 C 错误.

（3）C；**提示**

由于 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$~$N(0,1)$，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$~$N(0,1)$，故有

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}=P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}<\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1,$$

$$P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}=P\left(\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-1,$$

又因为标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 单调递增，$\dfrac{\varepsilon}{\sigma}<\dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}$，因此

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}<P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\},$$

故选项 C 正确.

（4）C；　　（5）B；　　（6）D.

6.3.3　由于 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 相互独立，因此 $X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{2n-1}^2$ 与 $X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{2n}^2$ 相互独立. 又因为

$$\frac{X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{2n-1}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),\quad \frac{X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{2n}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),$$

故

$$Y=\frac{X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{2n-1}^2}{X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{2n}^2}=\frac{(X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{2n-1}^2)/(n\sigma^2)}{(X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{2n}^2)/(n\sigma^2)}\sim F(n,n).$$

6.3.4　由于 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 相互独立且服从正态分布，因此 Y_1 和 Y_2 相互独立，且 Y_1-Y_2 服从正态分布. 而

$$E(Y_1-Y_2)=\mu-\mu=0,\quad D(Y_1-Y_2)=\frac{\sigma^2}{6}+\frac{\sigma^2}{3}=\frac{\sigma^2}{2},$$

因此 $Y_1-Y_2\sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$. 又因为 $\dfrac{(3-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$，且 S^2 与 Y_1-Y_2 相互独立，于是

$$\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{\dfrac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{2S^2}{2\sigma^2}}}\sim t(2).$$

6.3.5　记 $U=X_1+X_2$，$V=X_1-X_2$，则

$$U\sim N(0,2\sigma^2),\quad V\sim N(0,2\sigma^2),$$

因此

$$\frac{U^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1),\quad \frac{V^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1).$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathrm{Cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)\\&=D(X_1)+\mathrm{Cov}(X_2,X_1)-\mathrm{Cov}(X_1,X_2)-D(X_2)=0,\end{aligned}$$

因此统计量U和V相互独立，故根据F分布的定义，

$$Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\frac{U^2/(2\sigma^2)}{V^2/(2\sigma^2)}\sim F(1,1).$$

6.3.6　记$Y=\dfrac{1}{X}$，由于$X\sim F(n,n)$，则$Y\sim F(n,n)$，因此

$$P\{X<1\}=P\{Y<1\}=P\left\{\frac{1}{X}<1\right\}=P\{X>1\}.$$

又因为X为连续型随机变量，因此$P\{X=1\}=0$，而

$$P\{X<1\}+P\{X=1\}+P\{X>1\}=1,$$

故$P\{X<1\}=0.5$.

6.3.7　$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\mu|)=E(|X-\mu|)=\sigma E\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\right)$$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}t^2\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

$$D(Y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i-\mu|)=\frac{1}{n}D(|X-\mu|)=\frac{\sigma^2}{n}D\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}\left\{E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2-\left[E\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\right)\right]^2\right\}$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}\left[D\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)-\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right).$$

6.5　综合提高训练

例 6.5.1　设总体X服从参数为λ的指数分布，X_1,X_2为来自X的样本，记$Y=\sqrt{X_1X_2}$，试求$E(Y)$.

解　由题意X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因此

$$E(\sqrt{X})=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\lambda x}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}-1}\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

因为 X_1 与 X_2 相互独立，故 $\sqrt{X_1}$ 与 $\sqrt{X_2}$ 相互独立，且有

$$E(\sqrt{X_1}) = E(\sqrt{X_2}) = E(\sqrt{X}),$$

故

$$E(Y) = E(\sqrt{X_1 X_2}) = E(\sqrt{X_1}) \cdot E(\sqrt{X_2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4\lambda}.$$

例 6.5.2　设 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，样本均值 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n} X_i$，记 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$，试求 $E(\xi)$ 和 $D(\xi)$.

解　记 $Y_i = X_i + X_{n+i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，由于 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 相互独立且均服从 $N(\mu, \sigma^2)$，因此 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立且均服从 $N(2\mu, 2\sigma^2)$，因此 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 可以理解为来自总体 $Y \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$ 的一个样本，样本均值为

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} X_i = 2\overline{X}.$$

因此

$$\frac{\xi}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i - \overline{Y})^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

根据 χ^2 分布的性质可知，

$$E\left(\frac{\xi}{2\sigma^2}\right) = n-1, \quad D\left(\frac{\xi}{2\sigma^2}\right) = 2(n-1),$$

故

$$E(\xi) = 2(n-1)\sigma^2, \quad D(\xi) = 8(n-1)\sigma^4.$$

例 6.5.3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值，试证明当 $c = \overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 时，函数 $f(c) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - c)^2$ 取得最小值.

证法 1　由于

$$\begin{aligned}
f(c) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x} + \overline{x} - c)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - c)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(\overline{x} - c) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - c)^2 + 2(\overline{x} - c) \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - c)^2 + 2(\overline{x} - c) \cdot (n\overline{x} - n\overline{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - c)^2,
\end{aligned}$$

因此当 $c=\bar{x}$ 时，函数 $f(c)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2$ 取得最小值.

证法 2　由题意，$f'(c)=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)$，令 $f'(c)=0$，解得 $c=\bar{x}$．又因为

$$f''(c)=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)'=2n>0,$$

故 $f''(\bar{x})>0$，因此函数 $f(c)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2$ 在 $c=\bar{x}$ 处取得最小值.

例 6.5.4　设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，试证明 $Y=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_1-X_2|}$ 服从自由为1的 t 分布.

证　记 $U=X_1+X_2+X_3$，$V=X_1-X_2$，则

$$U\sim N(0,3\sigma^2),\quad V\sim N(0,2\sigma^2),\quad \frac{V^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1).$$

又因为

$$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}(X_1+X_2+X_3,X_1-X_2)=0,$$

因此统计量 U 和 V 相互独立，故根据 t 分布的定义，

$$Y=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{U}{|V|}=\frac{U\big/(\sqrt{3}\sigma)}{\sqrt{V^2\big/2\sigma^2}}\sim t(1).$$

例 6.5.5　【2005（3）】设 $X_1,X_2\cdots,X_n\ (n>2)$ 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$，求：

（1）Y_i 的方差 $D(Y_i)$；　（2）$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；　（3）常数 C，使得 $E[C(Y_1+Y_n)^2]=\sigma^2$．

解　（1）$D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}X_k\right]$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2;$$

（2）$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)+D(\overline{X})\\&=0-2\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})+\frac{\sigma^2}{n}\\&=-2\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_1\right)+\frac{\sigma^2}{n}\\&=-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{1}{n}\sigma^2;\end{aligned}$$

（3）由于 $E(Y_1)=E(Y_n)=0$，因此

$$
\begin{aligned}
E[C(Y_1+Y_n)^2] &= CE[(Y_1+Y_n)^2] = CD(Y_1+Y_n) \\
&= C[D(Y_1)+D(Y_n)+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)\} \\
&= C\left[\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2 - \frac{2}{n}\sigma^2\right] \\
&= C\cdot\frac{2n-4}{n}\sigma^2 = \sigma^2,
\end{aligned}
$$

故 $C=\dfrac{n}{2n-4}$.

第 7 章　参 数 估 计

7.1　知 识 要 点

7.1.1　参数与参数估计

在统计中，分布中所含有的未知常数或未知常数的函数通常称为**参数**，分布的各种特征数，例如总体均值$E(X)$、方差$D(X)$等也称为参数．未知参数常用θ表示，θ可能是一维的，也可能是多维的，θ所有的可能取值构成的集合称为**参数空间**，一般用Θ来表示．

设对于某个未知参数θ（可以为向量），现从总体中抽取一组样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，依据该样本对未知参数θ做出估计，或对θ的某一已知函数$g(\theta)$做出估计，这类问题称为**参数估计**．参数估计的形式主要有两种，即**点估计与区间估计**．

7.1.2　点估计

设θ为总体X的未知参数，现从总体中抽取一组样本$X_1, X_2,\cdots, X_n$，其观测值分别为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，构造统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用$\hat{\theta}(x_1, x_2,\cdots, x_n)$作为$\theta$的近似值，其中$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$\theta$的**点估计值**，$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为$\theta$的**点估计量**，点估计值和点估计量统称为**点估计**或**估计**，简记为$\hat{\theta}$．

7.1.3　矩估计法

矩估计的基本思想是用样本矩作为总体矩的估计量，用样本矩的连续函数估计总体矩的连续函数．其具体做法如下：

设总体X含有m个未知参数$\theta_1,\theta_2, \cdots,\theta_m$，$X_1, X_2,\cdots, X_n$为来自总体$X$的一组样本．

（1）求出总体X的前m阶矩$\mu_k=\mu_k(\theta_1,\cdots,\theta_m)$，$k=1, 2,\cdots,m$；

（2）对上述方程组进行求解，一般来说，可以得到$\theta_k=\theta_k(\mu_1,\cdots,\mu_m)$，$k=1, 2,\cdots,m$；

（3）将上式中的μ_k分别换成A_k，即可得到参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的矩估计量$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m$，其中，$A_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$为样本的$k$阶矩，$k=1, 2, \cdots, m$．

注　选择矩估计时涉及矩的阶数要尽量小，即能使用低阶矩时尽量不使用高阶矩．

7.1.4　最大（极大）似然估计法

最大（极大）似然估计法的基本思想：概率大的事件比概率小的事件更容易发生，以及概率越大越容易发生，小概率事件在一次试验中几乎不会发生．

设$X_1,\cdots,X_n$为来自总体X的一组样本，其观测值为$x_1,\cdots,x_n$，若总体X为离散型，设X的分布列为$P\{X=x\}=f(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$为待估参数，样本的**似然函数**为

$$L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),$$

若总体 X 为连续型，其密度函数为 $f(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$，样本的**似然函数**为

$$L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

对固定的 $x_1,\cdots,x_n$，若存在 $\hat{\theta}$ 使得 $L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称 $\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的**最大（极大）似然估计**. 注意：$\hat{\theta}$ 与 $x_1,\cdots,x_n$ 有关，即有 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 称为参数 θ 的**最大似然估计值**，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 称为参数 θ 的**最大似然估计量**.

若总体分布中包含多个参数，例如 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^{\mathrm{T}}$，则令

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0,\quad i=1,\cdots,m,$$

解方程组求得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_m$.

最大似然估计的不变性：设 $g(\theta)$ 为 θ 的函数，若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的最大似然估计. 例如 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为 σ^2 的最大似然估计，则 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 为 σ 的最大似然估计.

7.1.5　估计量的评选标准

（1）**无偏性**：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的估计，若对 $\forall\theta\in\Theta$，均有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计.

（2）**有效性**：设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，若对 $\forall\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，且至少对某一个 $\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

（3）**相合性**：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是参数 θ 的估计量，若对 $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$，则称 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的相合估计量.

*7.1.6　区间估计

设 θ 为总体 X 的未知参数，$\theta\in\Theta$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一组样本，$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 均为 θ 的估计量，若对于给定的常数 α $(0<\alpha<1)$ 和任意的 $\theta\in\Theta$，有 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}\geqslant 1-\alpha$，则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为参数 θ 的**置信水平**（或**置信度**）为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**. 通过构造一个置信区间对未知参数进行估计的方法称为**区间估计**.

当 X 为连续型随机变量时，对于给定的 α $(0<\alpha<1)$，总可以按照 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$ 求得置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$；当 X 为离散型随机变量时，常常找不到区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$，使得 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$，这时需要寻找区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 使得 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 至少为 $1-\alpha$，且尽量接近 $1-\alpha$.

*7.1.7　正态总体均值与方差的区间估计公式

表 7.1　单个正态总体均值与方差的区间估计

参数	条件	置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间
μ	σ^2 已知	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
	σ^2 未知	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ^2	μ 未知	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

注　表 7.1 中 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 和 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 分别是样本均值和样本方差.

表 7.2　两个正态总体均值与方差的区间估计

参数	条件	置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，$\sigma^2$ 未知	$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}, \quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right)$

注　表 7.2 中 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X$ 与 Y 相互独立，$X_1,X_2\cdots,X_m$ 为来自 X 的一个样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自 Y 的一个样本，$\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$ 分别为总体 X 与 Y 的样本均值与样本方差，$S_w^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$，$S_w=\sqrt{S_w^2}$.

7.2　典型例题分析

7.2.1　题型一：矩估计与最大似然估计

例 7.2.1　【1999（1）】设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$，并计算 $D(\hat{\theta})$.

解　由于

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x)\,\mathrm{d}x = \frac{\theta}{2},$$

解得 $\theta = 2\mu_1$，从而 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$．又因为 $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = \frac{4}{n}D(X)$，而

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} x^2 \cdot \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10}\theta^2,$$

因此

$$D(\hat{\theta}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{4}{n}\{E(X^2) - [E(X)]^2\} = \frac{4}{n}\left(\frac{3}{10}\theta^2 - \frac{1}{4}\theta^2\right) = \frac{\theta^2}{5n}.$$

例 7.2.2　【2006（1，3）】设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1-\theta, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0,1)$ 是未知参数，$X_1, X_2 \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，记 N 为样本值 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 中小于1的个数，试求 θ 的矩估计和最大似然估计.

解　由于

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot \theta \mathrm{d}x + \int_1^2 x \cdot (1-\theta)\mathrm{d}x = \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}(1-\theta) = \frac{3}{2} - \theta,$$

解得 $\theta = \frac{3}{2} - \mu_1$，从而 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$．

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N},$$

$$\ln L(\theta) = N\ln\theta + (n-N)\ln(1-\theta),$$

令 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$，得 $\frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0$，因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$．

例 7.2.3　设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	θ	$1-4\theta$	2θ	θ

其中未知参数 $0 < \theta < \frac{1}{4}$，$X_1, X_2 \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，则

（1）试求参数 θ 的矩估计量；

（2）若已取得样本值 -1，1，-1，2，0，1，1，2，试求 θ 的矩估计值.

解　（1）由于

$$\mu = E(X) = (-1)\times\theta + 0\times(1-4\theta) + 1\times 2\theta + 2\times\theta = 3\theta,$$

解得 $\theta = \frac{\mu}{3}$，因此参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{3}$．

（2）由于

$$\overline{x}=\frac{1}{8}(-1+1-1+2+0+1+1+2)=\frac{5}{8},$$

因此参数θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{3}=\frac{5}{24}$.

例 7.2.4　设总体X服从双参数指数分布，其密度函数为

$$f(x;\theta,c)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-c}{\theta}}, & x\geqslant c,\\ 0, & x<c,\end{cases}$$

其中$\theta>0$，$c>0$为未知参数，$x_1,x_2\cdots,x_n$为来自总体X的样本观测值，试求参数θ和c的最大似然估计.

解　记$x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则似然函数为

$$L(\theta,c)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta,c)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i-c}{\theta}}, & x_{(1)}\geqslant c,\\ 0, & x_{(1)}<c,\end{cases}$$

则当$x_{(1)}\geqslant c$时，则

$$\ln L(\theta,c)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{nc}{\theta},$$

由于$\frac{n}{\theta}>0$，因此$\ln L(\theta,c)$为c的单调递增函数，故要使得$\ln L(\theta,c)$达到最大，c应该取最大值，从而c的最大似然估计值为$\hat{c}=x_{(1)}$. 令

$$\frac{\partial\ln L(\theta,c)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{nc}{\theta^2}=0,$$

解得$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-c=\overline{x}-c$，从而参数$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\overline{x}-x_{(1)}$.

7.2.2　题型二：估计量的评选标准问题

例 7.2.5　设总体X服从参数为p的二项分布$b(m,p)$，$X_1,X_2\cdots,X_n$是来自总体X的样本，试利用样本$X_1,X_2\cdots,X_n$构造参数p和p^2的无偏估计量.

解　由于

$$E(X)=mp,\quad E(X^2)=[E(X)]^2+D(X)=(mp)^2+mp(1-p)=mp+m(m-1)p^2,$$

因此

$$p=\frac{1}{m}E(X),\quad p^2=\frac{1}{m(m-1)}[E(X^2)-mp]=\frac{1}{m(m-1)}[E(X^2)-E(X)],$$

故构造 p 和 p^2 的无偏估计为

$$\hat{p}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}X_i\,,\quad \hat{p}^2=\frac{1}{nm(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{nm(m-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-X_i)\,.$$

注　从本例可以看到，若 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，$(\hat{\theta})^2$ 不一定是参数 θ^2 的无偏估计.

例 7.2.6　设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，若当 $n\to\infty$ 时，$E(\hat{\theta}_n)\to\theta$，$D(\hat{\theta}_n)\to 0$，试证明 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计.

证　根据切比雪夫不等式，有

$$\begin{aligned}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}&=P\{|\hat{\theta}_n-E(\hat{\theta}_n)+E(\hat{\theta}_n)-\theta|\geqslant\varepsilon\}\\&\leqslant P\{|\hat{\theta}_n-E(\hat{\theta}_n)|+|E(\hat{\theta}_n)-\theta|\geqslant\varepsilon\}\\&=P\{|\hat{\theta}_n-E(\hat{\theta}_n)|\geqslant\varepsilon-|E(\hat{\theta}_n)-\theta|\}\\&\leqslant\frac{D(\hat{\theta}_n)}{(\varepsilon-|E(\hat{\theta}_n)-\theta|)^2}\to 0\,,\end{aligned}$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$，即 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计.

*7.2.3　题型三：区间估计问题

例 7.2.7　设有一批机器零件，其长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从中随机抽取 9 个样品，测得样本均值 $\overline{x}=6.8$（单位：cm），则

（1）根据以往经验知 $\sigma=0.6$（单位：cm），试求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间；

（2）若 σ^2 未知，测得样本标准差 $s=0.6$，试求 μ 和 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解　（1）由于 $\sigma^2=0.36$ 已知，因此 $X\sim N(\mu,0.36)$，故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

由题意，$n=9$，$\overline{x}=6.8$，$\sigma=0.6$，$\alpha=0.05$，查表知 $z_{0.025}=1.96$，因此 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(6.408,7.192)$.

（2）由于 σ^2 未知，故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

现 $n=9$，$\overline{x}=6.8$，$s=0.6$，$\alpha=0.05$，查表知 $t_{0.025}(8)=2.306$，因此 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(6.339,7.261)$.

由于 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，因此 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

由题意，$n=9$，$s=0.6$，$\alpha=0.05$，查表知 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，因此 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(0.164, 1.321)$．

例 7.2.8　某一饮料加工厂生产一批新投产的饮料，为了检测两条独立流水线的生产情况，现从两条流水线上分别抽取了样本容量为 16 和 20 的样本，测得 $\overline{x}=495$（单位：毫升），标准差 $s_1=4.2$；$\overline{y}=506$（单位：毫升），标准差 $s_2=3.0$；假设两条流水线生产的饮料容量均服从正态分布，其总体均值分别为 μ_1,μ_2，总体方差分别为 σ_1^2,σ_2^2，则

（1）若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 90% 的置信区间；

（2）试求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 置信水平为 90% 的置信区间.

解　（1）由于两个总体均服从正态分布，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},(\overline{X}-\overline{Y})+t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$．由题意，$m=16$，$n=20$，$\overline{x}=495$，$s_1=4.2$，$\overline{y}=506$，$s_2=3.0$，$\alpha=0.1$，查表知 $t_{0.05}(34)=1.691$，因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.90 的置信区间为 $(-13.027, -8.973)$．

（2）$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right).$$

由题意，$m=16$，$n=20$，$s_1=4.2$，$\overline{y}=506$，$\alpha=0.1$，查表知 $F_{0.05}(15,19)=2.23$，$F_{0.95}(15,19)=\dfrac{1}{F_{0.05}(19,15)}=0.429$，因此 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间为 $(0.628, 3.263)$．

*7.2.4　题型四：非正态总体的区间估计问题

例 7.2.9　设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_{400}$ 为来自总体 X 的样本，试构造 θ 的置信度为 0.90 的置信区间.

解　尽管总体 X 不服从正态分布，然而样本容量 $n=400$ 比较大，根据中心极限定理，可以认为 $\dfrac{\overline{X}-E(X)}{S/\sqrt{n}}$ 近似地服从 $N(0,1)$，故有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-E(X)}{S/\sqrt{n}}\right|<z_{0.05}\right\}\approx 0.90.$$

由于

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x)\,\mathrm{d}x = \frac{\theta}{2},$$

因此

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X} - \dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\right| < z_{0.05}\right\} \approx 0.90,$$

从而 θ 的置信度为 0.90 的置信区间为

$$\left(2\overline{X} - \frac{S}{10} z_{0.05}, 2\overline{X} + \frac{S}{10} z_{0.05}\right),$$

这里 $\overline{X}$ 为样本均值，S 为样本标准差，$z_{0.05}$ 为标准正态分布的上 0.05 分位点.

例 7.2.10 设随机变量 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 已知，$X_1, X_2 \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，记 $\eta = E(X)$，试求：

（1）X 的数学期望 η 的值；

（2）μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间；

（3）参数 η 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 （1）由于 Y 的密度函数为 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，因此

$$\begin{aligned}\eta = E(\mathrm{e}^Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^y \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\frac{(\mu+\sigma^2)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{[(y-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{\frac{(\mu+\sigma^2)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\end{aligned}$$

（2）由于 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，且 σ^2 已知，$Y_i = \ln X_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，因此 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{Y} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{Y} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad 其中\ \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

（3）由于 $\eta = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ 为 μ 的严格单调递增函数，因此

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P\left\{\overline{Y} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \overline{Y} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = P\left\{\mathrm{e}^{\overline{Y}+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}} < \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} < \mathrm{e}^{\overline{Y}+\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}}\right\} \\ &= P\left\{\mathrm{e}^{\overline{Y}+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}} < \eta < \mathrm{e}^{\overline{Y}+\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}}\right\},\end{aligned}$$

故参数 η 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\mathrm{e}^{\overline{Y}+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}}, \mathrm{e}^{\overline{Y}+\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}}\right),$$

其中 $\overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i$.

7.3　深 化 训 练

7.3.1　填空题

（1）【2002（3）】 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$$

$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，则未知参数 θ 的矩估计量为________.

（2）【2014（1，3）】 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数， $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 θ^2 的无偏估计，则 $c=$________.

（3）【2009（3）】设 $X_1,X_2\cdots,X_m$ 是来自二项分布 $b(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，记 $T=\overline{X}-S^2$，则 $E(T)=$________.

（4）设总体 X 的数学期望为 μ，方差为1，从总体 X 抽取了样本容量 $n=100$ 的一个样本，测得样本均值 $\overline{x}=5$，则 μ 的置信度为95% 的置信区间为________.

7.3.2　单项选择题

（1）设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 相互独立且同分布，$D(X_1)=\sigma^2$，$\overline{X}$ 和 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 分别为样本均值和样本方差，则下列结论正确的是（　　）.

（A） S 是 σ 的无偏估计量　　（B） S 是 σ 的最大似然估计量

（C） S 是 σ 的相合估计量　　（D） S^2 与 $\overline{X}$ 相互独立

（2）【2005（3）】设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ,σ^2 均为未知参数，若 $n=16$，样本均值 $\overline{x}=20$，样本标准差 $s=1$，则 μ 的置信水平为0.90 的置信区间为（　　）.

（A） $\left(20\mp\dfrac{1}{4}\times t_{0.05}(16)\right)$　　（B） $\left(20\mp\dfrac{1}{4}\times t_{0.05}(15)\right)$

（C） $\left(20\mp\dfrac{1}{4}\times t_{0.1}(16)\right)$　　（D） $\left(20\mp\dfrac{1}{4}\times t_{0.1}(15)\right)$

（3）设 θ 是关于总体 X 的参数，θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 统计含义为（　　）.

（A） $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 以 $1-\alpha$ 的概率包含 θ 的真值

（B） θ 以 $1-\alpha$ 的概率落入 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$

（C） θ 以 α 的概率落在 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 之外

（D）以 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 估计 θ 的取值范围，不正确的概率是 $1-\alpha$

7.3.3　【2004（1）】设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\[2ex] 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $\beta>1$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，试求：

（1）求 β 的矩估计量；（2）求 β 的最大似然估计量.

7.3.4　【2002（1）】设总体 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 为未知参数，若已取得样本值 $3,1,3,0,3,1,2,3$，试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

7.3.5　设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为某个已知常数，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，求参数 θ 的最大似然估计量.

7.3.6　【2013（1，3）】设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\[2ex] 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，试求：

（1）θ 的矩估计量；（2）θ 的最大似然估计量.

7.3.7　【2015（1，3）】设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本．试求：

（1）θ 的矩估计量；（2）θ 的最大似然估计量.

7.4　深化训练详解

7.3.1　填空题

（1）$\overline{X}-1$；**提示**　由于

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_{\theta}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x \underline{\underline{t=x-\theta}} \int_0^{+\infty}(t+\theta)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^{+\infty}(t+\theta)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t} = -(t+\theta)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \theta+1,$$

因此 $\theta=\mu_1-1$，从而 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}-1$.

（2）$\dfrac{2}{5n}$；

（3）np^2；**提示**　由于总体 $X\sim b(n,p)$，因此

$$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p),$$

因此

$$E(T)=E(\overline{X})-E(S^2)=E(X)-D(X)=np-np(1-p)=np^2.$$

（4）$(4.804, 5.196)$；**提示**　μ 的置信度为 95% 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

这里 $\overline{x}=5$，$\sigma=1$，$n=100$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$.

7.3.2　单项选择题

（1）C；**提示**　由于

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2\right],$$

根据辛钦大数定律，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{p}E(X_1^2),\quad \overline{X}\xrightarrow{p}E(X_1),$$

从而

$$S^2=\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2\right]\xrightarrow{P}E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\sigma^2,$$

因此 $S\xrightarrow{P}\sigma$，从而 S 是 σ 的相合估计量，选项 C 正确.

虽然 S^2 是 σ^2 的无偏估计量，但 S 不一定是 σ 的无偏估计量，因为无偏估计不具有不变性，选项 A 错误；$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的最大似然估计量，由于最大似然估计具有不变性，因此 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 为 σ 的最大似然估计，故选项 B 错误；若 $X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$，则选项 D 是正确的，但在一般情况下选项 D 不一定正确.

（2）B；　　（3）A.

7.3.3　（1）$\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$；（2）　$\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$；

提示　总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

7.3.4　由于

$$\mu_1=E(X)=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,$$

从而解得 $\theta=\dfrac{1}{4}(3-\mu_1)$，因此 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\overline{X}).$$

而 $\overline{x}=2$，因此 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}(3-2)=\dfrac{1}{4}$.

样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{8}p(x_i;\theta)=\theta^2\times[2\theta(1-\theta)]^2\times\theta^2\times(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta).$$

令 $\dfrac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$，得

$$\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，由于 $\theta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，因此 θ 的最大似然估计值为 $\theta=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

7.3.5　θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=X_{(1)}$.

7.3.6　（1）由于

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{\theta}{x}\right)=\theta,$$

因此 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$.

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x_i}}, & x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i > 0\ (i = 1,\cdots,n)$ 时，则

$$\ln L(\theta) = 2n\ln\theta - 3\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = 0,$$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat\theta = \dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$，因此 θ 的最大似然估计量为 $\hat\theta = \dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.

7.3.7　（1）由于

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_{\theta}^{1}\frac{x}{1-\theta}\mathrm{d}x = \frac{1+\theta}{2},$$

解得 $\theta = 2\mu - 1$，故 θ 的矩估计量为 $\hat\theta = 2\overline{X} - 1$.

（2）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值，似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

因此当 $\theta = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = x_{(1)}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大，故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat\theta = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = X_{(1)}.$$

7.5　综合提高训练

例 7.5.1　【2003（1）】设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数，$X_1, X_2 \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，记 $\hat\theta = X_{(1)}$，则

（1）求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

（2）求统计量 $\hat\theta$ 的分布函数 $F_{\hat\theta}(x)$；

（3）如果用 $\hat\theta$ 作为 θ 的估计量，讨论 $\hat\theta$ 是否是无偏的.

解　（1）$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$

（2）

$$\begin{aligned} F_{\hat\theta}(x) &= P\{X_{(1)} \leqslant x\} = 1 - P\{X_{(1)} > x\} = 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}\cdots P\{X_n > x\} \\ &= 1 - [1 - P\{X_1 \leqslant x\}]^n = 1 - [1 - F(x)]^n \\ &= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

（3）$\hat{\theta}$ 的密度函数为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$$

从而

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+\frac{1}{2n}$$

由于 $E(\hat{\theta})\neq\theta$，故 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计.

例 7.5.2　【2014（1）】设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本.

（1）求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$；

（2）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；

（3）是否存在实数 a，使得对 $\forall\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$？

解　（1）总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta.$$

（2）设 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 为样本的观测值，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2x_i}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, & x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i>0\,(i=1,\cdots,n)$ 时，则

$$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ ,$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\ ,$$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ ， θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

（3）由于 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 独立同分布，且 $E(X_1^2)=E(X^2)=\theta<+\infty$ ，根据大数定律可知，当 $n\to\infty$ 时， $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 以概率收敛于 $E(X^2)=\theta$. 即存在常数 $a=\theta$ ，使得对 $\forall\varepsilon>0$ ，都有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0\ .$$

例 7.5.3 设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数， $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，则

（1）证明 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}-\frac{1}{n}$ 和 $\hat{\theta}_2=\overline{X}-1$ 均为 θ 的无偏估计，其中 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$；

（2）比较 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的有效性；

（3）证明 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的相合估计.

解 （1）当 $x>\theta$ 时，总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{\theta}^{x}p(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{x}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\Big|_{\theta}^{x}=1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\ ,$$

因此当 $x>\theta$ 时， $X_{(1)}$ 的概率密度函数为

$$f_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)=n[\mathrm{e}^{-(x-\theta)}]^{n-1}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}=n\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}\ ,$$

当 $x\leqslant\theta$ 时， $f_1(x)=0$. 由于

$$\begin{aligned}E(\hat{\theta}_1)&=E[X_{(1)}]-\frac{1}{n}=\int_{\theta}^{+\infty}xn\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x-\frac{1}{n}=\int_{0}^{+\infty}n(u+\theta)\mathrm{e}^{-nu}\mathrm{d}u-\frac{1}{n}\\&=-\int_{0}^{+\infty}(u+\theta)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-nu}-\frac{1}{n}=-(u+\theta)\,\mathrm{e}^{-nu}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nu}\mathrm{d}u-\frac{1}{n}\\&=\theta+\left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nu}\right)_{0}^{+\infty}-\frac{1}{n}=\theta+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\theta,\end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}-\frac{1}{n}$ 为 θ 的无偏估计. 又因为

$$E(\hat{\theta}_2)=E(\overline{X})-1=E(X)-1=\int_{\theta}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x-1=\theta+1-1=\theta\ ,$$

所以 $\hat{\theta}_2=\overline{X}-1$ 也为 θ 的无偏估计.

（2）由方差的性质可知，

$$D(\hat{\theta}_1)=D\left(X_{(1)}-\frac{1}{n}\right)=D(X_{(1)})=E(X_{(1)}^2)-[E(X_{(1)})]^2,$$

而利用分部积分法可得

$$E(X_{(1)}^2)=\int_{\theta}^{+\infty}x^2 n\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x-\frac{1}{n}=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n}\theta+\theta^2,$$

因此

$$D(\hat{\theta}_1)=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n}\theta+\theta^2-\left(\theta+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}.$$

由于

$$D(\hat{\theta}_2)=D(\overline{X}-1)=\frac{1}{n}D(X)=\frac{1}{n}\{E(X^2)-[E(X)]^2\},$$

利用分部积分法容易证明

$$E(X^2)=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta^2+2\theta+2,$$

故 $D(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{n}(\theta^2+2\theta+2)-\frac{1}{n}(\theta+1)^2=\frac{1}{n}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，从而 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

（3）由切比雪夫不等式可知，对于 $\forall\varepsilon>0$，有

$$P\{|\hat{\theta}_1-\theta|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(\hat{\theta}_1)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{n^2\varepsilon^2},\quad P\{|\hat{\theta}_2-\theta|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(\hat{\theta}_2)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{n\varepsilon^2},$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_1-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_2-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$，故 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的相合估计.

例 7.5.4　设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ $(n>1)$ 为来自总体 $X\sim U(0,\theta)$ 的样本，试求常数 α 和 β，使得 $\hat{\theta}_1=\alpha\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2=\beta X_{(n)}$ 均为 θ 的无偏估计，并比较二者的有效性.

解　X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1 & x\geqslant\theta,\end{cases}$$

总体 X 的期望和方差分别为 $E(X)=\frac{\theta}{2}$，$D(X)=\frac{\theta^2}{12}$. 因为 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计，因此

$$E(\hat{\theta}_1)=\alpha E(\overline{X})=\alpha E(X)=\frac{\theta\alpha}{2}=\theta,$$

故 $\alpha=2$．又因为 $X_{(n)}$ 的密度函数为

$$f_n(x)=nF^{n-1}(x)f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{n-1}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计，因此

$$E(\hat{\theta}_2)=\beta E(X_{(n)})=\beta\int_0^\theta x\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=n\beta\int_0^\theta\left(\frac{x}{\theta}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{n\beta}{n+1}\theta=\theta,$$

故 $\beta=\dfrac{n+1}{n}$．

下面讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的有效性问题.

$$D(\hat{\theta}_1)=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{4}{n}\times\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}.$$

$$E(X_{(n)}^2)=\int_0^\theta x^2\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

故

$$\begin{aligned}D(\hat{\theta}_2)&=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2D(X_{(n)})=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\{E(X_{(n)}^2)-[E(X_{(n)})]^2\}\\&=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left[\frac{n}{n+2}\theta^2-\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2\right]=\frac{\theta^2}{n(n+2)}.\end{aligned}$$

由于

$$D(\hat{\theta}_2)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}<\frac{\theta^2}{3n}=D(\hat{\theta}_1),$$

因此 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

*第 8 章　假 设 检 验

8.1　知 识 要 点

8.1.1　假设检验的相关概念

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下，为了推断总体的某些性质，提出某些关于总体的论断或猜测，这些论断或猜测称为**统计假设**，人们根据样本所提供的信息对所提出的假设做出不拒绝或拒绝的决策的过程称为**假设检验**．例如考虑如下假设

$$H_0: \mu = \mu_0,\quad H_1: \mu \neq \mu_0,$$

其中论断 H_0（总体均值等于已知数 μ_0）称为**原假设**，H_1 与 H_0 相对立，称为**备择假设**，这是两个对立的假设，我们必须在 H_1 与 H_0 之间做出选择，不拒绝 H_0 或拒绝 H_0，若拒绝 H_0 则意味着接受 H_1．

例如，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ 的样本，其中 σ_0^2 已知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本的观测值．由于当 H_0 成立时，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，因此给定一个很小的正数 α（$0 < \alpha < 1$，如 $\alpha = 0.05$ 或 $\alpha = 0.1$ 等），由标准正态分布分位点的定义得

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha,$$

即取 $k = z_{\frac{\alpha}{2}}$，当 $|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geqslant k$ 时，拒绝 H_0，当 $|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} < k$ 时，不拒绝 H_0．其中的 α 称为**显著性水平**，统计量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ 称为**检验统计量**，当检验统计量取某个区域 C 中的值时，我们拒绝原假设 H_0，则称区域 C 为**拒绝域**，拒绝域的边界点称为**临界点**．本例中，拒绝域为 $|z| \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}$，临界点为 $z = -z_{\frac{\alpha}{2}}$，$z = z_{\frac{\alpha}{2}}$．

8.1.2　两类错误

假设检验的**推断原理**为：小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的．但几乎不可能发生不等于不发生，因而假设检验所做出的结论有可能是错误的．表 8.1 给出了可能出现的两类错误．

表 8.1　假设检验的两类错误

类型	含义	犯错误的概率
第一类错误	H_0 为真，拒绝了 H_0，即弃真的错误	$P\{$拒绝 $H_0 \mid H_0$ 为真$\}$
第二类错误	H_0 不真，不拒绝了 H_0，即取伪的错误	$P\{$不拒绝 $H_0 \mid H_0$ 不真$\}$

注　(1) 只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑犯第二类错误的概率的检验，称为**显著性检验**.

(2) 当样本容量 n 一定时，若减少犯第一类错误的概率，则犯第二类错误的概率往往增大．若要使犯两类错误的概率都同时减小，除非增加样本容量.

8.1.3　假设检验的步骤

(1) 根据实际问题，提出原假设 H_0 和备择假设 H_1；

(2) 给定显著性水平 α 和样本容量 n；

(3) 选取适当的检验统计量，并在 H_0 为真的条件下确定检验统计量的分布；

(4) 给出拒绝域；

(5) 由样本观测值计算统计量的观测值，看是否属于拒绝域，从而对 H_0 作出选择.

8.1.4　正态总体均值与方差的检验

表 8.2　正态总体均值与方差的检验（显著性水平为 α）

原假设 H_0	备择假设 H_1	条件	检验统计量	拒绝域
$\mu=\mu_0$ $\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$ $z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$
$\mu=\mu_0$ $\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$ $t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$
$\mu_1-\mu_2=\delta$ $\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$ $\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert z\rvert\geqslant z_{\alpha/2}$ $z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$
$\mu_1-\mu_2=\delta$ $\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$ $\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$\lvert t\rvert\geqslant z_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ $t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\sigma_1^2=\sigma_0^2$ $\sigma_1^2\leqslant\sigma_0^2$ $\sigma_1^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_0^2$ $\sigma_1^2>\sigma_0^2$ $\sigma_1^2<\sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ $F\geqslant F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\mu_D=0$ $\mu_D\leqslant 0$ $\mu_D\geqslant 0$	$\mu_D\neq 0$ $\mu_D>0$ $\mu_D<0$	成对数据	$t=\dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$ $t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$

注　$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$.

8.2　典型例题分析

8.2.1　题型一：单个正态总体的假设检验问题

例 8.2.1　某食品加工厂生产一种盒装的奶油蛋糕，为检验产品的质量是否符合要求，现从某个批次的奶油蛋糕中随机抽取 16 盒，测得 $\bar{x}=426.1$，$s^2=16$，假设盒装蛋糕的质量服从正态分布，给定显著性水平 $\alpha=0.05$，则

（1）若厂家规定每个包装盒的标准重量为 428 克，试问这批食品是否符合生产标准？

（2）若厂家规定每个包装盒的标准重量不小于 428 克，试问这批食品是否符合标准？

解　（1）由题意，检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0=428,\ H_1:\mu\neq\mu_0,$$

由于总体方差 σ^2 未知，故取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$，$\alpha=0.05$，$n=16$，检验的拒绝域为：

$$|t|\geqslant t_{0.025}(15)=2.132\ .$$

由 $\mu_0=428$，$\bar{x}=426.1$，$s^2=16$，计算得 $|t|=1.9<t_{0.025}(15)$，故不拒绝 H_0，认为这批食品符合生产标准.

（2）由题意，检验假设

$$H_0:\mu\geqslant\mu_0=428,\ H_1:\mu<\mu_0,$$

由于总体方差 σ^2 未知，因此取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$，$\alpha=0.05$，$n=16$，检验的拒绝域为：

$$t\leqslant -t_{0.05}(15)=-1.753\ .$$

由 $\mu_0=428$，$\bar{x}=426.1$，$s^2=16$，计算得 $t=-1.9<-t_{0.05}(15)$，故拒绝 H_0，认为这批食品不符合生产标准.

例 8.2.2　某一零件加工企业利用自动流水线加工一批机器配件，已知该机器配件的长度服从方差为 $\sigma_0^2=0.12$ 的正态分布，为了检测自动流水线的加工精度，现随机抽取了 24 件机器配件，测得机器配件长度的样本标准差为 $s=0.39$，给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，试问：（1）产品的总体方差 σ^2 是否有显著变化；（2）产品的总体方差 σ^2 是否有显著变大.

解　（1）检验如下假设

$$H_0:\sigma^2=0.12,\ H_1:\sigma^2\neq 0.12,$$

由于总体均值 μ 未知，因此取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，$\alpha=0.05$，检验的拒绝域为：

$$\chi^2\geqslant\chi^2_{0.025}(23)=38.075\ \text{或者}\ \chi^2\leqslant\chi^2_{0.975}(23)=11.688\ .$$

由 $n=24$，$s^2=0.152$，$\sigma_0^2=0.12$，计算得 $\chi^2=29.133$，由于 $\chi^2_{0.975}(23)<\chi^2<\chi^2_{0.025}(23)$，故不拒绝 H_0，认为总体方差 σ^2 没有显著变化.

（2）检验如下假设

$$H_0:\sigma^2 \leqslant 0.12,\ H_1:\sigma^2 > 0.12 .$$

取检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$， $\alpha=0.05$，检验的拒绝域为： $\chi^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(23)=35.172$,现在 $n=24$， $s^2=0.152$， $\sigma_0^2=0.12$，计算得 $\chi^2=29.133$，由于 $\chi^2<\chi^2_{0.05}(23)$，因此不拒绝 H_0，认为总体方差 σ^2 没有显著变大.

8.2.2　题型二：两个正态总体的假设检验问题

例 8.2.3　甲、乙两台机床加工同一种型号的机器零件，现从甲、乙机床加工的零件中分别随机抽取样本容量为 9 和 13 的样本，测得 $\bar{x}=20.93$， $s_1^2=0.221$， $\bar{y}=21.2$， $s_2^2=0.342$. 假设两台机床所加工零件的长度均服从正态分布，试问：

（1）两总体的方差是否相等？

（2）两台机床加工零件的长度是否存在显著差异？（$\alpha=0.05$）

解　（1）检验如下假设：

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2,$$

采用 F 检验，取检验统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，由于 $\alpha=0.05$，检验的拒绝域为：

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\geqslant F_{0.025}(8,12)=3.51 \text{ 或 } \frac{s_1^2}{s_2^2}\leqslant F_{0.975}(8,12)=\frac{1}{F_{0.025}(12,8)}=\frac{1}{4.20}=0.238 .$$

由 $s_1^2=0.221$， $s_2^2=0.342$，计算得 $F=0.646$，由于 $F_{0.975}(8,12)<0.646<F_{0.025}(8,12)$，因此不拒绝 H_0，认为 σ_1^2 与 σ_2^2 之间不存在显著差异.

（2）检验假设

$$H_0:\mu_1=\mu_2,\ H_1:\mu_1\neq\mu_2,$$

由（1）知， $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，采用检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，其中 $\delta=0$，由于 $\alpha=0.05$，拒绝域为：

$$|t|\geqslant t_{0.025}(20)=2.086 .$$

这里 $n_1=9$， $n_2=13$， $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$， $\bar{x}=20.93$， $s_1^2=0.221$， $\bar{y}=21.2$， $s_2^2=0.342$，算得 $t=-1.148$，由于 $|t|=1.148<t_{0.025}(20)$，因此不拒绝原假设 H_0，认为两台机床加工零件的长度不存在显著差异.

8.2.3　题型三：两类错误问题

例 8.2.4　现从总体 $X\sim N(\mu,16)$ 中抽取一个样本容量 $n=25$ 的一个样本， $\overline{X}$ 为样本均值对于检验问题

$$H_0:\ \mu=\mu_0,\ H_1:\ \mu\neq\mu_0,$$

取检验的拒绝域为： $|\bar{x}-\mu_0|\geqslant k$，其中 $\bar{x}$ 为样本均值的观测值．试求：

（1）常数 k 的值，使得该检验的显著性水平为 0.05；

（2）当 $\mu=\mu_1\ (\mu_1\neq\mu_0)$ 时犯第二类错误的概率.

解　（1）当原假设 H_0 成立时，$\overline{X}\sim N\left(\mu_0,\dfrac{16}{25}\right)$，因此使得该检验的显著性水平为 0.05，即

$$P\{|\overline{X}-\mu_0|\geqslant k\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{0.8}\geqslant\frac{k}{0.8}\right\}=0.05,$$

从而 $\Phi\left(\dfrac{k}{0.8}\right)=0.975$，即 $\dfrac{k}{0.8}=z_{0.975}=1.96$，解得 $k=1.568$.

（2）当备择假设 $\mu=\mu_1\ (\mu_1\neq\mu_0)$ 成立时，$\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{16}{25}\right)$，根据犯第二类错误的概率，可知

$$\begin{aligned}\beta&=P_{u=u_1}\{|\overline{X}-\mu_0|<k\}=P_{u=u_1}\{\mu_0-k<\overline{X}<\mu_0+k\}\\&=P_{u=u_1}\left\{\frac{\mu_0-k-\mu_1}{0.8}<\frac{\overline{X}-\mu_1}{0.8}<\frac{\mu_0+k-\mu_1}{0.8}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{\mu_0+k-\mu_1}{0.8}\right)-\left(\frac{\mu_0-k-\mu_1}{0.8}\right).\end{aligned}$$

例 8.2.5　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim U(0,\theta)$ 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值，考虑检验问题

$$H_0:\theta=\theta_0,\ H_1:\theta>\theta_0.$$

若拒绝域为：$x_{(n)}\geqslant c$，其中 $x_{(n)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，试求犯第一类错误的概率.

解　由题意，最大次序统计量 $X_{(n)}$ 的密度函数为

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

从而犯第一类错误的概率为

$$P_{H_0}\{X_n\geqslant c\}=\int_c^{\theta_0}\frac{nx^{n-1}}{\theta_0^n}\mathrm{d}x=1-\left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n.$$

8.3　深 化 训 练

8.3.1　填空题

（1）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ,σ^2 均为未知参数．若检验 $H_0:\mu\leqslant1$，$H_1:\mu>1$，则检验统计量为__________.

（2）样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，要检验 H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$，则采用统计量为__________，在 H_0 成立时，该统计量服从__________分布.

（3）小概率事件原理指的是__________.

8.3.2　单项选择题

（1）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，为了检验总体 X 的均值大于 μ_0，则应做检验的假设为

（A）$H_0:\mu>\mu_0$，$H_1:\mu\leqslant\mu_0$　　（B）$H_0:\mu\geqslant\mu_0$，$H_1:\mu\leqslant\mu_0$

（C）$H_0:\mu<\mu_0$，$H_1:\mu\geqslant\mu_0$　　（D）$H_0:\mu\leqslant\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$

（2）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，在显著性检验 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$ 中，若在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下不拒绝原假设 H_0，那么在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下有（　　）.

（A）拒绝 H_0　　（B）不拒绝 H_0

（C）可能不拒绝 H_0，也可能拒绝 H_0　　（D）无法确定

（3）在假设检验中，显著性水平 α（　　）.

（A）一定等于犯第一类错误的概率　　（B）一定等于犯第二类错误的概率

（C）用于控制犯第一类错误的概率　　（D）用于控制犯第二类错误的概率

8.3.3　试简要阐述在显著性检验中选择原假设与备择假设的基本原则.

8.3.4　在假设检验中，若检验结果是不拒绝原假设 H_0，则有可能会犯哪一类错误？若检验结果是接受备择假设 H_1，则又有可能会犯哪一类错误？

8.3.5　【1998】设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机抽取了36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分，问在显著性水平为0.05下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？并给出检验过程.

8.3.6　设总体 $X \sim N(\mu,1)$，其中 μ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，给定显著性水平 $\alpha=0.05$，检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0,\ H_1:\mu\neq\mu_0,$$

若拒绝域为：$|\bar{x}-\mu_0|\geqslant 0.5$，则样本容量至少应取多少？

8.3.7　某药厂研制了某种止痛药的新配方，声称在相同剂量下，药效持续时间能比原来配方平均增加2个小时．根据以往资料，原配方的平均药效持续时间为6小时．为了检验新配方是否达到疗效，收集了16个用新配方的药效持续时间数据，算得样本均值为 $\bar{x}=8.4$ 小时，样本标准差 $s=0.6$ 小时，假定药效持续时间服从正态分布，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验药物的新配方是否达到疗效.

8.3.8　某机床加工某种精密仪器，根据精度要求，仪器长度的标准差不能超过0.5 mm，现从某个批次的产品中抽取了20件样本，测得标准差为0.6 mm，假设仪器长度服从正态分布，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验该机床是否正常工作？

8.3.9　设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 $N(\mu,\sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知．对于检验

$$H_0:\ \mu=\mu_0,\quad H_1:\ \mu=\mu_1,\quad (\mu_1>\mu_0)$$

设检验的拒绝域为 $\bar{x}-\mu_0\geqslant c$，其中 c 为常数，试计算犯两类错误的概率.

8.4　深化训练详解

8.3.1　填空题

（1）$t=\dfrac{\overline{X}-1}{S/\sqrt{n}}$；　　（2）$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$；$\chi^2(n-1)$；

（3）概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的.

8.3.2　单项选择题

（1）D；

（2）B；**提示**　不论总体方差σ^2是已知还是未知，当显著性水平α变小时，检验的拒绝域会变小，从而接受域增大，因此在$\alpha = 0.1$下不拒绝原假设H_0，则在$\alpha = 0.05$下必不拒绝H_0.

（3）C；

8.3.3　在进行显著性检验时，由于犯第一类错误的概率是可以控制的，因此原假设H_0和备择假设H_1的地位是不对等的．在选择H_0和H_1时，要使得两类错误中后果更严重的错误成为第一类错误，最大程度地降低因犯错误造成的不良影响．如果两类错误造成的后果严重程度差不多，则常常取H_0为维持现状，以减少不必要的经济损失.

8.3.4　若检验结果是不拒绝H_0，可能会有两种情况；一是H_0为真，此时不会犯错误；二是H_1为真，此时就会犯第二类错误．若检验的结果是接受H_1，类似地，若此时H_0为真，则会犯第一类错误.

8.3.5　设该次考试的考生成绩记为X，则$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，由题意，需检验假设

$$H_0：\ \mu = 70，\ H_1：\ \mu \neq 70_1 .$$

由于总体方差σ^2未知，故取检验统计量$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$．当原假设$H_0$成立时，$t \sim t(n-1)$．现$\alpha = 0.05$，$n = 36$，检验的拒绝域为：

$$|t| \geqslant t_{0.025}(35) = 2.0301 .$$

由$\mu_0 = 70$，$\bar{x} = 66.5$，$s = 15$，计算得$|t| = 1.4 < t_{0.025}(15)$，故不拒绝$H_0$，认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

8.3.6　由于总体方差已知，因此取检验统计量$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}}$，当原假设$H_0$成立时，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1) ,$$

因此由

$$P\{|\overline{X} - \mu_0| \geqslant 0.5\} = P\left\{\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{1/\sqrt{n}} \geqslant \frac{0.5}{1/\sqrt{n}}\right\} \leqslant 0.05$$

可知$\dfrac{0.5}{1/\sqrt{n}} \geqslant z_{0.025} = 1.96$，解得$n \geqslant 15.37$，从而样本容量$n$应至少取$16$.

8.3.7　记X为新配方的药效持续时间，则$X \sim N(\mu, \sigma^2)$．由题意，检验如下假设

$$H_0 : \mu \leqslant 8,\ H_1 : \mu > 8 .$$

由于总体的方差未知，因此取检验统计量为$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$，$\alpha = 0.05$，$n = 16$，检验的拒绝域为：

$$t \geqslant t_{0.05}(15) = 1.753 .$$

由 $\mu_0=8$， $\bar{x}=8.4$， $s=0.6$，计算得 $t=2.67>t_{0.05}(15)$，故拒绝 H_0，认为药物的新配方已经达到疗效.

8.3.8　记 X 为仪器的长度，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 由题意，检验如下假设

$$H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2=0.5^2,\ H_1:\sigma^2<0.5^2 .$$

选取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$， $\alpha=0.05$，检验的拒绝域为：

$$\chi^2\leqslant\chi^2_{0.05}(19)=30.143 .$$

现在 $n=20$， $s^2=0.6^2$， $\sigma_0^2=0.5^2$，计算得 $\chi^2=27.36$，由于 $\chi^2<\chi^2_{0.05}(19)$，故拒绝原假设，认为该机床工作存在异常.

8.3.9　当 H_0 成立时， $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，因此犯第一类错误的概率为

$$P\{\text{拒绝}\,H_0\,|\,H_0\,\text{为真}\}=P_{\mu_0}\{\overline{X}-\mu_0\geqslant c\}=P_{\mu_0}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geqslant\frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

$$=1-P_{\mu_0}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right).$$

当 H_1 成立时， $\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，因此犯第二类错误的概率为

$$P\{\text{拒绝}\,H_0\,|\,H_0\,\text{不真}\}=P_{\mu_1}\{\overline{X}-\mu_0<c\}=P_{\mu_1}\left(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\frac{c+(\mu_0-\mu_1)}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{c+(\mu_0-\mu_1)}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right).$$

8.5　综合提高训练

8.5.1　设某公司的月利润 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，经 16 次抽样得到样本均值为 50.5（万元），样本标准差为 0.2（万元）. 求：（1）求 σ^2 的置信度为 90%的区间估计；（2）在 $\alpha=0.05$ 下，检验 $\mu\leqslant 50$ 是否成立.

解　（1）已知 $n=16,\bar{x}=50.5,s=1.2$， $\alpha=0.1$，而

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(15)=25.996,\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(15)=7.261,$$

由于

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\frac{15\times1.2^2}{25.996}=0.831,$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\frac{15\times 1.2^2}{7.261}=2.975,$$

故 σ^2 的置信度为 90%的置信区间为 $(0.831,\ 2.97)$.

（2）要检验的假设为

$$H_0:\mu\leqslant 50,\ H_1:\mu>50,$$

而 $\alpha=0.05$， $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(8)=1.8595$， 由于

$$t=\frac{\overline{x}-50}{s/\sqrt{n}}=\frac{50.5-50}{\frac{1.2}{4}}=1.6667,$$

且 1.6667<1.8595，因此拒绝 H_0， 故不可以认为 $\mu\leqslant 50$ 成立.

例 8.5.2　设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_0^2)$ 和 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_0^2)$ 相互独立，其中 σ_0^2 已知，现从两总体中分别抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n2}$， 给定显著性水平 α， 试给出检验

$$H_0:\mu_1\leqslant k\mu_2,\ H_1:\mu_1>k\mu_2$$

的拒绝域，其中 $k>0$ 为常数.

解　记 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别为两样本的样本均值，则拒绝域的形式为 $\overline{x}-k\overline{y}\geqslant c$． 由于

$$\frac{\overline{X}-k\overline{Y}-(\mu_1-k\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_1}+\frac{k^2\sigma_0^2}{n_2}}}=\frac{\overline{X}-k\overline{Y}-(\mu_1-k\mu_2)}{\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

因此

$$\begin{aligned}P\{\text{拒绝 }H_0\mid H_0\text{ 为真}\}&=P_{H_0}\{\overline{X}-k\overline{Y}\geqslant c\}\\&=P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}-k\overline{Y}}{\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}}\geqslant\frac{c}{\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}}\right)\\&\leqslant P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}-k\overline{Y}-(\mu_1-k\mu_2)}{\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}}\geqslant\frac{c}{\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}}\right)=\alpha,\end{aligned}$$

取 $\dfrac{c}{\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}}=z_\alpha$， 解得 $c=z_\alpha\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}$． 从而在显著性水平 α 下，检验的拒绝域为：

$$\overline{x}-k\overline{y}\geqslant z_\alpha\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{k^2}{n_2}}.$$

2013 年考研试题概率论与数理统计考题

1.【2013（1，3）】设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，$p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}, i=1,2,3$．则下列结论正确的是（　　）．

（A） $p_1 > p_2 > p_3$　　（B） $p_2 > p_1 > p_3$

（C） $p_3 > p_1 > p_2$　　（D） $p_1 > p_3 > p_2$

解　$p_1 = P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$，

$$p_2 = P\{-2 \leqslant X_2 \leqslant 2\} = P\left\{-1 \leqslant \frac{X_2 - 0}{2} \leqslant 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$p_3 = P\{-2 \leqslant X_3 \leqslant 2\} = P\left\{\frac{-2-5}{3} \leqslant \frac{X_3 - 5}{3} \leqslant \frac{2-5}{3}\right\}$$

$$= \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) < \Phi(-1),$$

由标准正态分布函数的性质可知，$p_1 > p_2 > p_3$，故选项 A 正确．

2．【2013（1）】设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$，给定 $\alpha\ (0 < \alpha < 0.5)$．常数 $C > 0$ 满足 $P\{X > C\} = \alpha$，则 $P\{Y > C^2\} =$（　　）．

（A） α　　（B）$1-\alpha$　　（C）2α　　（D）$1-2\alpha$

解　由 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$，根据 t 分布与 F 的关系可知

$$P\{Y > C^2\} = P\{X^2 > C^2\} = P\{X > C\} + P\{X < -C\} = 2\alpha,$$

故选项 C 正确．

3．【2013（1）】设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，$\alpha > 0$ 为常数，则 $P\{Y \leqslant \alpha + 1 \mid Y > \alpha\}$ ________．

解

$$P\{Y \leqslant \alpha+1 \mid Y > \alpha\} = 1 - P\{Y > \alpha+1 \mid Y > \alpha\} = 1 - P\{Y > 1\} = P\{Y \leqslant 1\} = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

4.【2013（1）】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

令

$$Y = \begin{cases} 2, & X \leqslant 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geqslant 2. \end{cases}$$

试求：（1）Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（2） $P\{X \leqslant Y\}$．

解　（1）由题意，有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y,X\leqslant 1\}+P\{Y\leqslant y,1<X<2\}+P\{Y\leqslant y,X\geqslant 2\}$$
$$=P\{2\leqslant y,X\leqslant 1\}+P\{X\leqslant y,1<X<2\}+P\{1\leqslant y,X\geqslant 2\}.$$

因此，当 $y<1$ 时， $F_Y(y)=0$；当 $1\leqslant y<2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X\leqslant y,1<X<2\}+P\{1\leqslant y,X\geqslant 2\}$$
$$=\int_1^y \frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+=\frac{y^3+18}{27};$$

当 $y\geqslant 2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X\leqslant 1\}+P\{1<X<2\}+P\{X\geqslant 2\}=1.$$

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

（2） $P\{X\leqslant Y\}=P\{X=Y\}+P\{X<Y\}$
$$=P\{1<X\leqslant 2\}+P\{X\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 2\}$$
$$=\int_0^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27}.$$

5. 【2013（1，3）】设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本．试求：

（1） θ 的矩估计量；（2） θ 的最大似然估计量．

解 （1）由于

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{\theta}{x}\right)=\theta,$$

因此 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$．

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^n\frac{\theta^2}{x_i^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x_i}}, & x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i > 0\,(i=1,\cdots,n)$ 时，则

$$\ln L(\theta) = 2n\ln\theta - 3\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = 0,$$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$，因此 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.

6.【2013（3）】设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

，

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2) =$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{12}$　　（B）$\dfrac{1}{8}$　　（C）$\dfrac{1}{6}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

解　由于

$$\begin{aligned}P\{X+Y=2) &= P\{X=1,Y=1\} + P\{X=2,Y=0\} + P\{X=3,Y=-1\}\\ &= P\{X=1\}P\{Y=1\} + P\{X=2\}P\{Y=0\} + P\{X=3\}P\{Y=-1\}\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

故选项 C 正确.

7.【2013（3）】设 (X,Y) 为二维随机变量，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在给定 $X = x\,(0<x<1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：（1）(X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；（2）Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$；（3）$P\{X>2Y\}$.

解　由题意，(X,Y) 的概率密度为

（1）$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x) = \begin{cases} \dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x, 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（2）Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 \dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}x & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（3） $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}\dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{8}$.

2014 年考研试题概率论与数理统计考题

1.【2014（1，3）】设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　　）.

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

解　利用减法公式和事件的独立性，有

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B),$$

即

$$0.3=P(A)-0.5P(A),$$

解得 $P(A)=0.6$，所以

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.2,$$

故 B 正确.

2.【2014（1）】设连续型随机变量 X_1,X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 和 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，设随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则（　　）.

（A）$E(Y_1)\geqslant E(Y_2),\ D(Y_1)\geqslant D(Y_2)$　　（B）$E(Y_1)=E(Y_2),\ D(Y_1)=D(Y_2)$

（C）$E(Y_1)=E(Y_2),\ D(Y_1)\leqslant D(Y_2)$　　（D）$E(Y_1)=E(Y_2),\ D(Y_1)\geqslant D(Y_2)$

解　由题意，有

$$\begin{aligned}E(Y_1)&=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_1(y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)],\\E(Y_2)&=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)],\end{aligned}$$

故 $E(Y_1)=E(Y_2)$. 又因为

$$D(Y_1)-D(Y_2)=E(Y_1^2)-E(Y_2^2),$$

而

$$\begin{aligned}E(Y_1^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_1(y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_2(y)\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{2}[E(X_1^2)+E(X_2^2)],\end{aligned}$$

$$E(Y_2^2)=E\left[\frac{1}{4}(X_1^2+2X_1X_2+X_2^2)\right]=\frac{1}{4}\left[E(X_1^2)+E(X_2^2)+2E(X_1X_2)\right]$$

因此

$$E(Y_1^2)-E(Y_2^2)=\frac{1}{4}[E(X_1^2)+E(X_2^2)-2E(X_1X_2)]$$
$$=\frac{1}{4}E(X_1^2+X_2^2-2X_1X_2)$$
$$=\frac{1}{4}E[(X_1-X_2)^2]=D(X_1-X_2)\geqslant 0,$$

故选项 D 正确.

3.【2014（1，3）】设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^3}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本．若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 c=________.

解 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{2\theta}x^2\dfrac{2x}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\dfrac{5\theta^2}{2}$,

因此

$$E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=c\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=cn\frac{5\theta^2}{2},$$

若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则有 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$，即 $cn\dfrac{5\theta^2}{2}=\theta^2$，故 $c=\dfrac{2}{5n}$.

4．【2014（1，3）】设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2},$$

给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 $Y\sim U(0,i),\ i=1,2$．试求：

（1）Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（2）$E(Y)$.

解 （1）根据分布函数的定义，有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$$
$$=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}.$$

而 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 的概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid i)=\begin{cases}\dfrac{1}{i}, & 0<y<i,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此，当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0<y<1$ 时，

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}\int_0^y 1\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\times\frac{y}{2}=\frac{3y}{4};$$

当$1\leqslant y<2$时，

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{2+y}{4};$$

当$1\leqslant y<2$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{y}{2}=\frac{2+y}{4}$．故$Y$的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{3y}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{2+y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

（2）Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot\frac{3}{4}\mathrm{d}y+\int_1^2 y\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

5.【2014（1）】 设总体X的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$为来自总体X的样本.

（1）求$E(X)$和$E(X^2)$；

（2）求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_n$；

（3）是否存在实数a，使得对$\forall\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$？

解　（1）总体X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta.$$

（2）设 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 为样本的观测值，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2x_i}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, & x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $x_i>0\,(i=1,\cdots,n)$ 时，则

$$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

令

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,$$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$， θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

（3）由于 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 独立同分布，且 $E(X_1^2)=E(X^2)=\theta<+\infty$，根据大数定律可知，当 $n\to\infty$ 时， $\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 以概率收敛于 $E(X^2)=\theta$. 即存在常数 $a=\theta$，使得对 $\forall\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0.$$

6.【2014（3）】设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_2-X_1}{\sqrt{2}X_3}$ 服从的分布为（　　）.

（A） $F(1,1)$　　（B） $F(2,1)$　　（C） $t(1)$　　（D） $t(2)$

解　由于 $X_i\sim N(0,\sigma^2)$，且 X_1,X_2,X_3 相互独立，因此

$$\frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1),\quad \frac{X_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),$$

且 $\dfrac{X_2-X_1}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_3^2}{\sigma^2}$ 独立，根据 t 分布的定义可知， $S=\dfrac{X_2-X_1}{\sqrt{2}X_3}\sim t(1)$. 故选项 C 正确.

7. 【2014（3）】设随机变量 X,Y 的概率分布相同，X 的概率分布为

$$P\{X=0\}=\frac{1}{3}, \quad P\{X=1\}=\frac{2}{3},$$

且 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，试求：（1）(X,Y) 的概率分布；（2）$P\{X+Y\leqslant 1\}$.

解　（1）设 (X,Y) 的概率分布为

Y \ X	0	1
0	p_1	p_2
1	p_3	p_4

由题设可知，

$$E(X)=E(Y)=\frac{2}{3}, \quad D(X)=D(Y)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=P\{X=1,Y=1\}-\frac{4}{9}.$$

从而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{P\{X=1,Y=1\}-\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2},$$

因此

$$p_4=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9},$$

故

$$p_2=\frac{2}{3}-p_4=\frac{1}{9}, \quad p_3=\frac{2}{3}-p_4=\frac{1}{9}, \quad p_1=\frac{1}{3}-p_3=\frac{2}{9}.$$

由此可得 (X,Y) 的概率分布为

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

（2）$P\{X+Y\leqslant 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

2015 年考研试题概率论与数理统计考题

1．【2015（1，3)】若 A,B 为任意两个随机事件，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　　　（B） $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

（C） $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　　　（D） $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解　由 $AB\subset A$，可知 $P(AB)\leqslant P(A)$，类似地，$P(AB)\leqslant P(B)$，因此

$$P(AB)\leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2},$$

故选项 C 正确.

2．【2015（1)】设随机变量 X,Y 不相关，$E(X)=2, E(Y)=1, D(X)=3,$ 则 $E[X(X+Y-2)]=$（　　）.

（A） -3　　　（B） 3　　　（C） -5　　　（D） 5

解　$E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)$

$$=D(X)+[E(X)]^2+E(X)E(Y)-2E(X)=5.$$

故选项 D 正确.

3．【2015（1, 3)】二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$.则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

解　由 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$，可知 X 与 Y 不相关，从而相互独立，且

$$X\sim N(1,1)，\quad Y\sim N(0,1).$$

因此

$$\begin{aligned}P\{XY-Y<0\}&=P\{(X-1)Y<0\}\\&=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1<0,Y>0\}\\&=P\{X<1\}P\{Y>0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4．【2015（1，3)】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现为止．记 Y 为观测次数．试求：（1） Y 的概率分布；（2） $E(Y)$.

解　（1）在每次观测中，观测值大于 3 的概率为

$$p=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

故 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=C_{k-1}^{1}p(1-p)^{k-2}p=(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2},\ k=2,3,\cdots.$$

（2） $E(Y)=\sum_{k=2}^{+\infty}kP\{Y=k\}=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}$.

设

$$S(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2},$$

当 $|x|<1$ 时，有

$$T(x)=\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{+\infty}\int_0^x k(k-1)x^{k-2}\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{+\infty}kx^{k-1},$$

$$\int_0^x T(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{+\infty}\int_0^x kx^{k-1}\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{+\infty}x^k=\frac{x^2}{1-x},$$

因此

$$T(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2},\quad S(x)=\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{(1-x)^3},$$

所以

$$E(Y)=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{\left(1-\frac{7}{8}\right)^3}=16.$$

5．【2015（1，3）】设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本．试求：

（1） θ 的矩估计量；（2） θ 的最大似然估计量．

解　（1）由于

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_\theta^1\frac{x}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2},$$

解得 $\theta=2\mu-1$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots n,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因此当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=x_{(1)}$ 时， $L(\theta)$ 达到最大，故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}=X_{(1)}.$$

6.【2015（3）】设总体 $X \sim b(m,\theta)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=$（　　）.

（A） $(m-1)n\theta(1-\theta)$　　（B） $(n-1)m\theta(1-\theta)$

（C） $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　　（D） $mn\theta(1-\theta)$

解　由于样本方差 S^2 是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量，因此

$$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=E(S^2)=D(X)=m\theta(1-\theta),$$

所以

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=(n-1)m\theta(1-\theta),$$

故选项 B 正确.

2016 年考研试题概率论与数理统计考题

（1）【2016（1）】设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)\ (\sigma>0)$，记 $p=P\{X \leqslant \mu+\sigma^2\}$，则（　　）.

（A） p 随着 μ 的增加而增加　　（B） p 随着 σ 的增加而增加

（C） p 随着 μ 的增加而减少　　（D） p 随着 σ 的增加而减少

解　因为 $p=P\{X \leqslant \mu+\sigma^2\}=P\{X-\mu \leqslant \sigma^2\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \sigma\right\}=\Phi(\sigma)$，从而 p 随着 σ 的增加而增加。故选项 B 正确.

（2）【2016（1）】随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3，且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）.

（A） -0.3　　（B） 0.3　　（C） -0.5　　（D） 0.5

解　随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

因此

$$E(X)=\frac{2}{3},\quad E(Y)=\frac{2}{3},\quad E(XY)=\frac{2}{9},\quad D(X)=\frac{4}{9},\quad D(Y)=\frac{4}{9},$$

故

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{2}.$$

因此正确答案为 C.

（3）【2016（1）】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为（　　）.

解　μ 的置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

由题知 $\overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}=10.8$，且 $\overline{x}=9.5$，故

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=10.8-9.5=1.3,$$

因此 μ 的置信区间为 $(9.5-1.3,\ 10.8)$，即 $(8.2,\ 10.8)$.

（4）【2016（1，3）】设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, X\leqslant Y,\\0, X>Y.\end{cases}$$

①写出 (X,Y) 概率密度；②问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；③求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

解 ①如图 1 所示，D 的面积为

$$S=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

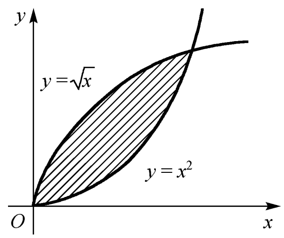


图 1 示意图

所以 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x},\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

②令 $A=\left\{U<\frac{1}{2}\right\},B=\left\{X<\frac{1}{2}\right\}$,

则

$$P(A)=P\left\{U<\frac{1}{2}\right\}=P\{X>Y\}=\frac{1}{2},$$

$$P(B)=P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{x<\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\,\mathrm{d}y=\frac{4\sqrt{2}-1}{8},$$

$$P(A\cap B)=P\left\{U<\frac{1}{2},X<\frac{1}{2}\right\}=P\left\{Y<X<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\iint\limits_{y<x<\frac{1}{2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

由于 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，因此 U 和 X 不独立.

③ $F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{U+X\leqslant z,X\leqslant Y\}+P\{U+X\leqslant z,X>Y\}$
$=P\{X\leqslant z-1,X\leqslant Y\}+P\{X\leqslant z,X>Y\}$.

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F(z)=0+P\{X\leqslant z,X>Y\}=\int_0^z\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{3}{2}z^2-z^3$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F(z)=\int_0^{z-1}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y+\frac{1}{2}=2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2}$；

当 $z\geqslant 2$ 时，$F(z)=1$，故

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2+\dfrac{1}{2}, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\leqslant 2.\end{cases}$$

（5）【2016（1，3）】设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

①求 T 的概率密度；②确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

解　①设 T 的分布函数为 $F(t)$，则

$$\begin{aligned}F(t)&=P\{T\leqslant t\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}\\&=P\{X_1\leqslant t\}\cdot P\{X_2\leqslant t\}\cdot P\{X_3\leqslant t\}=F_X^3(t),\end{aligned}$$

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta,\end{cases}$$

因此 T 的概率密度 $f_T(t)$ 为

$$f_T(t)=F'(t)=3F_X^2(t)f_X(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

②由于

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\theta}t\cdot\frac{9t^8}{\theta^9}\,\mathrm{d}t=\frac{9}{10}\frac{t^{10}}{\theta^9}\Big|_0^{\theta}=\frac{9}{10}\theta,$$

根据 $E(aT)=\theta$，解得 $a=\dfrac{10}{9}$.

（6）【2016（3）】设 A,B 为随机事件，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$．若 $P(A|B)=1$，则下面正确的是（　　）.

（A）$P(\bar{B}|\bar{A})=1$　（B）$P(A|\bar{B})=0$　（C）$P(A+B)=1$　（D）$P(B|A)=1$

解　由 $P(A|B)=1$ 得 $P(AB)=P(B)$，而

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=1,$$

故选项 A 正确.

（7）【2016（3）】设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)$ 为（　　）.

（A）6　（B）8　（C）14　（D）15

解　因为 X,Y 独立，因此

$$D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2$$
$$=\{D(X)+[E(X)]^2\}\{D(Y)+[E(Y)^2]\}-[E(X)E(Y)]^2=14,$$

故选项 C 正确.

（8）【2016（3）】设袋中有红、白、黑球各1个，从中有放回地取球，每次取1个，直到三种颜色的球都取到为止，则取球次数恰为 4 的概率为________.

解 设 A 表示"取球次数恰为 4"，则

$$P(A)=C_3^2C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+C_3^2C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+C_3^2C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$$